جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

# فصل اول

# تحلیل پوششی داده ها

## 1-1 مقدمه

موضوع تحلیل پوششی داده ها[1] (DEA) در سال (1978-1979) توسط چارنز – کوپر – رودز[2] مطرح شد . آنها اساس کار خود را بر روی مقاله فارل[3] (1957) بنا نهادند . حاصل این تحقیقات مقاله ای به نام CCR شد .

بعد از آن بنکر – چارنز – کوپر[4] (1984) مقاله BCC را مطرح کردند .

---

1)Data Envelopment Analysis
2)Charnes , Cooper and Rhodes
3)Farell
4)Banker , Charnes and Cooper

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

این دو مقاله پایه بسیاری از مطالعات تحلیل کارآیی شد و این شاخه از علم تحقیق در عملیات به نام تحلیل پوششی داده ها گسترش یافت .

به طوری که امروزه بیش از دو هزار مقاله و گزارش و کتاب در این زمینه ارائه و منتشر شده است .

## 2-1 واحد های تصمیم گیرنده[1] (DMU)

هر DMU بوسیله یک بردار ورودی $X \in R^m$ و یک بردار خروجی $Y \in R^S$ مشخص می شود . مولفه‌های بردار ورودی X ، شاخص های ورودی و مولفه های بردار خروجی Y ، شاخص های خروجی می باشند .

واحدهای تصمیم گیرنده قدرت اجرایی و قدرت تصمیم گیری دارند . اما معمولاً قادر نیستند تشخیص دهند که چه برنامه ای را باید اجرا نمایند . برای این منظور محاسبه اندازه کارآیی DMU ها ، می تواند بسیار مفید و مطلوب باشد .

روش های مختلفی برای محاسبه اندازه گیری کارآیی ارائه شده است که می توان آنها را به دو دسته عمده تقسیم کرد .

5)Decision Making Unites

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

روش های پارامتر و روش های غیرپارامتری[1] .

اما این مستلزم تعیین تابع تولید[2] می باشد که در DEA مهم‌ترین مسئله می باشد .

### 1-3 تابع تولید

تابع تولید ، تابعی است که بیشترین خروجی ممکن را از ترکیب ورودی  ها فراهم می کند .

فرض کنید m ورودی به صورت $x_1,\dots,x_m$ برای تولید یک خروجی به صورت y مصرف ، مـی شود .

تابع تولید به صورت $y=F(x_1,\dots,x_m)$ در نظر گرفته می شود .

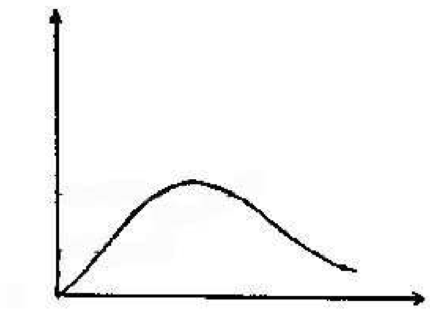
اما این تعریف دو ضعف بزرگ دارد .

1)فقط برای حالت های تک خروجی کاربرد دارد .

2)تعیین ضابطه F.

به همین دلیل این روش کاربرد چندانی ندارد .

در تئوری اقتصاد خرد شکل تابع تولید را به صورت زیر در نظر می گیرند.




---

1)Parametric And Non-parametric

2)Production Function

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و با شماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

شکل (1-1)

ورود
ی

### 1-4 روش‌های پارامتری

ایدهٔ کار به این صورت است که ، تابعی پیش فرض در نظر گرفته می شود . سپس با استفاده از تکنیک های مناسبی پارامترهای آن تعیین می گردد .

یکی از معروف ترین توابع تولید ، در اقتصاد خود تابع کاب – داگلاس[1] است .

که صورت کلی آن این چنین است :

$$y = A_o \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_i}$$

$x_1,\dots,x_m$ ورودی ها و $A_o$ و $a_1,\dots,a_m$ پارامتر هستند که با روش های بهینه سازی تخمین زده می‌شوند .

فرض کنید $y_j$ خروجی واحد j ام و $x_{ij}$ورودی i ام $DMU_j$ باشد .

1)Cobb-Daglas

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

چون y بیشترین خروجی ممکن است پس :

$$y_j \le y = A_o \prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{a_i} \qquad \text{و} \qquad j=1,\dots,n$$

با لگاریتم گیری از طرفین داریم :

$$Lny_j \le LnA_o + \sum_{i=1}^{m} a_i Lnx_{ij} \qquad \text{و} \qquad j=1,\dots,n$$

$$Lnx_{ij} = x'_{ij} \quad \text{و} \quad i=1,\dots,m \quad \text{و} \quad j=1,\dots m$$

$$Lny_j = y'_j \quad \text{و} \quad j=1,\dots,n$$

$$LnA_o = a_o$$

دراین صورت :

$$y'_j \le a_o + \sum_{i=1}^{m} a_i x'_{ij} \quad \text{و} \quad j=1,\dots,n$$

هدف کمینه کردن انحراف $y - y_j$ برای تمام واحدها است .

این معادل است با می نیمم نمودن عبارت :

$$a_o + \sum_{i=1}^{m} a_i x'_{ij} - y'_{ij}$$

بنابراین مساله برنامه ریزی خطی زیر مطرح می گردد :

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n}(a_o + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x'_{ij} - y'_{ij})$$

$$\text{s.t} \quad a_o + \sum_{i=1}^{m} a_i x'_{ij} - y'_j \geq 0 \qquad \text{و} \qquad j = 1,\dots,n \qquad (1-4-1)$$

$$a_i \geq 0 \qquad \text{و} \qquad i = 1,\dots,m$$

$$a_o \geq 0$$

این مسئله همواره جواب شدنی دارد . بعنوان مثال :

$$a_i = 0 \qquad \text{و} \qquad i = 1,\dots,m$$

$$a_o = \max_j y'_j$$

یک جواب شدنی مسئله است .

کارائی کاب – داگلاس برای واحد j ام به صورت زیر تعریف می شود :

$$E_j = \frac{y_j}{y_j^*}$$

$y_j^*$ مقدار خروجی بهینه با استفاده از تابع کاب – داگلاس است .

**1-4-1 قضیه**

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

ثابت کنید در تابع کاب – داگلاس ، اگر $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$ در این صورت برای هر $\lambda \geq o$ ، $F(\lambda X) = \lambda F(X)$ .

**اثبات :**

$$F(\lambda x_{1j},\dots,\lambda x_{mj}) = A_o \prod_{i=1}^{m} (\lambda x_{ij})^{a_i} \qquad \text{و} \qquad j = 1,\dots,n$$

$$= A_o (\lambda x_{1j})^{a_1} \dots (\lambda x_{mj})^{am} \qquad \text{و} \qquad j = 1,\dots,n$$

$$= A_o \lambda^{\sum_{i=1}^{m} a_i} \prod_{i=1}^{m} x_{ij} \qquad \text{و} \qquad j = 1,\dots,n$$

$$= \lambda^{\sum_{i=1}^{m} a_i} A_o \prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{a_i} \qquad \text{و} \qquad j = 1,\dots,n$$

$$= \lambda A_o \prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{a_i} \qquad \text{و} \qquad j = 1,\dots n$$

$$= \lambda F(x_{1j},\dots,x_{mj})$$

## 5–1 تعریف غالب[1]

---

1) Dominat

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

معمولاً در بین مشاهدات ، ورودی ها با مقادیر کمتر ، با مقادیر خروجی ناکمتر و یا خروجی ها با مقادیر بیشتر با مقادیر ورودی نابیشتر مطلوب هستند .

دو DMU با m ورودی و s خروجی را به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$\begin{bmatrix} -X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{11} \\ \vdots \\ -x_{m1} \\ y_{11} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} -X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{12} \\ \vdots \\ -x_{m2} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{s2} \end{bmatrix}$$

در صورتی که داشته باشیم :

$$\begin{bmatrix} -X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}$$

و این نامساوی برای لااقل یک مولفه به صورت اکید باشد ، در این صورت واحد تصمیم گیرنـده اول ، واحد تصمیم گیرنده دوم را مغلوب می کند .

و یا واحد دوم ، در مقایسه با واحد اول ناکارا است .

### 1-5-1 تعریف

n ، DMU به صورت $j=1,\dots,n$ و $(x_j, y_j)$ مفروض است .

مجموعه T را به صورت زیر تعریف می کنیم :

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$$T=\left\{\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\ ;\ \lambda_j\geq o \text{ و } j=1,\dots,n\right\}$$

$DMU_k$ ، کارای نسبی است اگر و فقط اگر نتوان $(x,y)$ی از $T$ یافت که :

$$\begin{pmatrix}-X\\Y\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}-X_k\\Y_k\end{pmatrix}$$

و این نامساوی لااقل در یک مولفه به صورت اکید باشد .

بنابراین اگر وجود داشته باشد $(X',Y')\in T$ به طوری که :

$$\begin{pmatrix}-X'\\Y'\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}-X_k\\Y_k\end{pmatrix}$$

و این نامساوی لااقل برای یک مولفه به صورت اکید باشد ، در این صورت واحد $(X_k,Y_k)$ در مقایسه با امکان تولید $(X',Y')$ ناکارا است .

### 6-1 مجموعه امکان تولید[1](PPS)

همان طور که گفته شد ، تابع تولید که به روش های پارامتری تعیین می شود دو اشکال عمده دارد . برای رفع این دو مشکل ، محققین را بر آن داشت تا با استفاده از ورودی ها و خروجی ها

1)Production Possibility Set

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

مجموعه ای به نام مجموعه امکان تولید فراهم نمایند . به طوری که مرز این مجموعه به عنوان تابع تولید تجربی در نظر گرفته می شود .

هر نقطه واقع در مرز ، به صورت ترکیب نامنفی از مشاهدات می باشد .

مجموعه امکان تولید را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$T = \{(X,Y) |$ ورودی X بتواند خروجی Y را تولید نماید$\}$

### 7-1 مدل های اساسی DEA

زوج بردارهای ورودی و خروجی n ، DMU به صورت $j=1,...,n$ $(X_j,Y_j)$ را در نظر می گیریم.

فرض می کنیم این بردارها نامنفی باشند . وهرکدام لااقل یک مولفه مثبت داشته باشند .

این مطلب را با نماد ریاضی به صورت زیر می نویسیم:

$$X_j \geq 0 \quad , \quad X_j \neq 0 \quad , \quad j=1,...,n$$

$$Y_j \geq 0 \quad , \quad Y_j \neq 0 \quad , \quad j=1,...,n$$

مجموعه امکان تولید را با حرف T نشان می دهیم . و برای ساختن آن ، اصول موضوعه زیر را می پذیریم.

1-اصل ناتهی بودن (شمول مشاهدات) :

تمامی مشاهدات در T قرار دارد .

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$\forall_j \quad (X_j, Y_j) \in T$

2–اصل بیکرانی اشعه (بازده به مقیاس ثابت ) :

اگر $(X,Y) \in T$ در این صورت برای هر $K \geq o$ ، $(KX,KY) \in T$

3–اصل امکان پذیری :

برای هر مشاهده $(X,Y) \in T$ ، هر فعالیت نامنفی $(\bar{X},\bar{Y})$ که $\bar{X} \geq X$ و $\bar{Y} \leq Y$ ، در این صورت $(\bar{X},\bar{Y}) \in T$ .

4– اصل تحدب :هر ترکیب محدب مشاهدات متعلق به T است .

بنابراین مجموعه امکان تولید T که در اصول موضوعه فوق صدق می کند ، به صورت زیر بدست می آید :

$$T = \{(X,Y) \mid X \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_j X_j \;,\; Y \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_j Y_j \;,\; \lambda_j \geq \circ \;,\; j = 1,\dots,n\}$$

برای ارزیابی هر DMU ، روشی که بکار می رود به این صورت است که ، فاصله شعاعی بین هر مشاهده و یک نقطه از مرز را که به صورت ترکیب نامنفی n مشاهده است ، محاسبه می شود .

اما ممکن است تمامی اصول موضوعه فوق به غیر از اصل اول برقرار نباشند . بنابراین در حالت کلی تحت مفروضات (اصول موضوعه) قابل قبول ، مسئله برنامه ریزی خطی زیر یک مدل اساسی در ماهیت خروجی است .

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۴۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$\Lambda(z)\subseteq R^{n}$ یک مجموعه از وزن های $\lambda\in R^{n}$ است .

$$\text{Max}\quad \theta+\varepsilon(1S^{-}+1S^{+})$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j+S^{-}=X_k \quad \text{s.t} \qquad (1-1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j-S^{+}=\theta Y_k$$

$$\lambda\in\Lambda(Z)$$

$$S^{-}\geq o$$

$$S^{+}\geq o$$

$\varepsilon>\circ$ و یک ثابت نا ارشمیدسی است .و $S^{-}\in R^{m}$ و $S^{+}\in R^{S}$ .

مساله (1-1) در ماهیت خروجی ، کمترین فاصله در وضعیت خروجی بین واحد تحت ارزیابی $(X_k,Y_k)$ و مرز تشکیل یافته به وسیله ترکیب نقاط مشاهده شده با استفاده از مضارب $\lambda\in\Lambda(z)$ را می دهد .

اگر کاهش ورودی واحد $(X_k,Y_k)$ مد نظر باشد ، در این صورت مسئله (2-1) در ماهیت ورودی به صورت زیر خواهد بود.

$$\min\quad \phi-\varepsilon(1S^{-}+1S^{+})$$

$$\text{s.t}\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j+S^{-}=\phi X_k \qquad (2-1)$$

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j - S^{+} = Y_k$$

$$\lambda \in \Lambda(z)$$

$$S^{-} \geq o$$

$$S^{+} \geq o$$

مجموعه های زیر ، با توجه به شرایط قرار داده شده روی $\Lambda(z)$ و همچنین فرض بازده به مقیاس پیشنهاد شده است .

1) $\Lambda(CRS) = \{\lambda \in R^n \mid \lambda \geq o\}$

2) $\Lambda(VRS) = \{\lambda \in R^n \mid 1\lambda = 1 \ , \ \lambda \geq o\}$

3) $\Lambda(NIRS) = \{\lambda \in R^n \mid 1\lambda \leq 1 \ , \ \lambda \geq o\}$

4) $\Lambda(NDRS) = \{\lambda \in R^n \mid 1\lambda \geq 1 \ , \ \lambda \geq o\}$

5) $\Lambda(FDH) = \{\lambda \in R^n \mid 1\lambda = 1 \ , \ \forall j \ \ \lambda_j \in \{o,1\}\}$

6) $\Lambda(FRH) = \{\lambda \in R^n \mid \ \forall j \ \lambda_j \in z_{+}\}$

7) $\Lambda(ERH) = \{\lambda \in R^n \mid \ \forall j \ \forall k \ \ j \neq k \ \ \lambda_j.\lambda_k = \circ \ \}$

### 1-7-1 فرم پوششی مدل CCR اساسی در ماهیت خروجی (چارنز و همکاران1978)

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$$\text{Max} \quad \theta + \varepsilon(1S^- + 1S^+)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j + S^- = X_k \quad \text{s.t} \qquad (3-1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j - S^+ = \theta Y_k$$

$$\lambda \in \Lambda(CRS)$$

$$S^- \geq o$$

$$S^+ \geq o$$

**1-7-2 فرم پوششی مدل BCC اساسی در ماهیت خروجی (بنکر و همکاران 1989)**

با حذف اصل تحدب در مدل CCR ، فرم پوششی مدل BCCدر ماهیت خروجی برای ارز یابی

$DMU_k$

به صورت زیر حاصل می شود

$$\text{Max} \quad \theta + \varepsilon(1S^- + 1S^+)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j + S^- = X_k \quad \text{s.t} \qquad (4-1)$$

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j - S^{+} = \theta Y_k$$

$$\lambda \in \Lambda(VRS)$$

$$S^{-} \geq o$$

$$S^{+} \geq o$$

PPS این مدل به صورت زیر است :

$$T_V = \{(X,Y) \mid X \geq \sum_{i=1}^{n}\lambda_j X_j \ , \ Y \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_j Y_j \ , \sum_{i=1}^{n}\lambda_j = 1 \ , \ \lambda_j \geq o, j=1,\dots,n\}$$

**1-7-3 قضیه**

در مدل های (1-3) و (1-4) ، $\theta^* \geq 1$ ؟

**اثبات :**

برای مدل (1-3) ، $\theta = 1$ و $(S^{-*}, S^{+*}) = (0,0)$ و $\lambda^* = e_k$

یک جواب شدنی است . بنابراین : $\theta^* \geq 1$

عیناً برای مدل (1-4) ثابت می شود .

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

**4-7-1 قضیه**

واحد $(X_k, Y_k)$ کارای مدل (1-3) است ، اگر و فقط اگر

1) $\theta^* = 1$

2) $(S^{-*}, S^{+*}) = (0,0)$ در هر جواب بهینه .

**اثبات :**

مدل (1-3) را در نظر بگیرید . فرض کنید . $(\theta^*, \lambda^*, S^{-*}, S^{+*})$ جواب بهینه این مدل و $(X_k, Y_k)$ کارای این مدل باشد .

ثابت می کنیم ۱ = $\theta^*$ و $(S^{-*}, S^{+*}) = (0,0)$ در هر جواب بهینه

اثبات به برهان خلف ، دو حالت دارد . حالت اول : $\theta^* > 1$ در این حالت :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* Y_j > Y_k$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* X_j \geq -X_k$$

چون $(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* X_j \ , \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* Y_j) \in T_C$ ، بنابراین این متناقض با کارا بودن $(X_k, Y_k)$ است .

حالت دوم : $(S^{-*}, S^{+*}) \neq (0,0)$ و $\theta^* = 1$ .

بدون آن که به کلیت استدلال خللی وارد آید فرض می کنیم :

www.kandoocn.com www.kandoocn.com www.kandoocn.com www.kandoocn.com www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$\exists p \; ; \; s_p^{-*} > o$

در این صورت :

$$-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \, x_{ij} \geq -x_{ik} \quad , \qquad i = 1,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \, y_{rj} \geq y_{rk} \quad , \qquad r = 1,\dots,S$$

به طوری که نامساوی اول در مولفه p ام به صورت اکید است . و این متناقض با کارا بودن $(X_k, Y_k)$ است .

**اثبات عکس:**

فرض کنید شرایط 1 و 2 برقرار باشد ثابت می کنیم $DMU_k$ کارای مدل (1-3) است .

اثبات به برهان خلف ، فرض می کنیم چنین نباشد . بنابراین

$$\exists \; \lambda \geq o \; ; \quad \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -X_K \\ \\ Y_K \end{bmatrix}$$

و این نامساوی لااقل در یک مولفه اکید است .

بدون آن که به کلیت استدلال خللی وارد آید فرض می کنیم :

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} > y_{rk}$$

در این صورت لازم می آید $s_r^{+*} > 0$ . که این متناقض با فرض است .

### 1-7-5 قضیه

واحد $(X_k, Y_k)$ کارای مدل (1-4) است ، اگر و فقط اگر :

1) $\theta^* = 1$

2) $(S^{-*}, S^{+*}) = 0$ در هر جواب بهینه .

**اثبات :**

مشابه قضیه 1-7-4 می باشد.

## 1-8 فرم مضربی CCR

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

مدل CCR بدون ε مفروض است .

$$\min \ \phi$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \phi x_{ik} \quad , \quad i = 1,\ldots,m \qquad (5-1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rk} \quad , \quad r = 1,\ldots,s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,\ldots,n$$

$$s_i^- \geq 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,m$$

$$s_r^+ \geq 0 \quad , \quad r = 1,\ldots,s$$

دو آل مدل (5-1) را می نویسیم . (فرم مضربی CCR )

$$\max \ \sum_{r=1}^{S} u_r y_{rk} \qquad (6-1)$$

$$\text{s.t} \quad -\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \leq 0 \quad , \quad j = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1$$

$$u_r \geq 0 \quad , \quad r = 1,\ldots,s$$

$$v_i \geq 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,m$$

مشابهاً دوآل مدل BCC بدون ε به صورت زیر است :

$$+u_{\circ} \ \max \ \sum_{r=1}^{S} u_r y_{rk} \qquad (7-1)$$

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$$\text{s.t} \quad -\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + u_o \le 0 \quad , \quad j=1,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1$$

$$u_r \ge 0 \quad , \quad r=1,\dots,s$$

$$v_i \ge 0 \quad , \quad r=1,\dots,m$$

### 1-8-1 تعریف کارایی CCR

$DMU_k$ کارای مدل CCR مضربی است ، اگر و فقط اگر وجود داشته باشد جواب بهینه ای مانند $(V^*, U^*)$ به طوری که:

1) $V^* > 0 \quad , \quad U^* > 0$

2) $U^* Y_k = 1$

### 2-8-1 قضیه

ثابت کنید تعریف فوق و تعریف 1-7-4 معادل هستند .

**اثبات :**

فرض می کنیم $(\theta^*, \lambda^*, S^{-*}, S^{+*})$ جواب بهینه مدل (1-3) باشد و $DMU_k$ کارای این مدل .

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

بنابراین :

1) $\theta^* = 1$

2) $(S^{-*}, S^{+*}) = (0,0)$ در هر جواب بهینه .

بنابر قضیه مکمل زائد قوی ، جواب بهینه ای مانند $(V^*, U^*)$ برای مدل CCR مضربی یافت می شود . به طوری که :

$$v_i^* . s_i^{-*} = 0 \quad \& \quad v_i^* + s_i^{-*} > 0 \quad \text{و} \quad i = 1,\dots,m$$

$$u_r^* . s_r^{+*} = 0 \quad \& \quad u_r^* + s_r^{+*} > 0 \quad \text{و} \quad r = 1,\dots,s$$

بنابراین نتیجه می شود : $V^* > 0$ و $U^* > 0$ .

از طرفی بنابر قضیه قوی دو آلیتی :

$$\theta^* = U^* Y_k = 1$$

**1-8-3 نتیجه**

$DMU_k$ کارای مدل BCC مضربی است ، اگر و فقط اگر وجود داشته باشد جواب بهینه ای مانند $(V^*, U^*, u_0^*)$ به طوری که :

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

1) $V^* > 0 \quad , \quad U^* > 0$

2) $U^*Y_k + u_0^* = 1$

**اثبات :** مشابه قضیه (1-8-2) می باشد

### 1-8-4 قضیه

شرط لازم و کافی برای آن که $DMU_k$ کارای مدل BCC باشد این است که لااقل یک ابرصفحه تکیه کننده با بردار نرمال مثبت در این نقطه موجود باشد .

**اثبات :**

فرض کنید $DMU_k$ کارای BCC مضربی باشد . در این صورت وجود دارد جواب بهینه ای مانند $(V^*, U^*, u_0^*)$ به طوری که :

الف) $V^* > 0 \quad , \quad U^* > 0$

ب) $-V^*X_j + U^*Y_j + u_0^* \le 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n$

ج) $\theta^* = U^*Y_k + u_0^* = 1$

د) $V^*X_k = 1$

از (ج) و (د) نتیجه می شود :

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$$V^*X_k = U^*Y_k + u_\circ^*$$

$$-V^*X_k + U^*Y_k + u_\circ^* = \circ$$

اکنون ثابت می کنیم هر نقطه $T_V$ در شرط (ب) صدق می کند .

فرض می کنیم $(X',Y') \in T_V$ در این صورت وجود دارد $\lambda \geq \circ$ به طوری که :

$$\text{(هـ)} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \leq X' \\ \text{و} \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \geq Y' \\ \text{و} \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \end{cases}$$

$$\forall j \qquad -V^*X_j + U^*Y_j + u_\circ^* \leq \circ$$

برای $\lambda_j \geq \circ$ :

$$\forall j \qquad -V^*\lambda_j X_j + U^*\lambda_j Y_j + \lambda_j u_\circ^* \leq \circ$$

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$$-V^*\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j + U^*\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j + u_\circ^*\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \le \circ$$

با توجه به رابطه های (هـ) نتیجه می شود که :

$$-V^*X' + U^*Y' + u_\circ^* \le \circ$$

**اثبات عکس :**

فرض می کنیم $(V^*, U^*, U_\circ^*)$ جواب بهینه مدل BCC مضربی باشد به طوری که

$(V^*, U^*)$ بردار نرمال مثبت بوده و :

$$-V^*X_k + U^*Y_k + u_\circ^* = \circ$$

$$-V^*X_j + U^*Y_j + u_\circ^* \le \circ \quad , \qquad j = 1, \dots, n$$

$$V^*X_k = 1$$

بنابراین :

$$V^*X_k = U^*Y_k + u_\circ^* \qquad = 1$$

لذا بنا بر نتیجه 1-8-3 $DMU_k$ کارای BCC است .

**1-8-5 نتیجه**

شرط لازم و کافی برای آن که $DMU_k$ کارای مدل CCR باشد این است که ، لااقل یک ابرصفحه تکیه کننده با بردار نرمال مثبت در این نقطه موجود باشد.

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

**اثبات :** مشابه قضیه (1–8–4) می باشد .

### 1–8–6 قضیه

ثابت کنید اگر برای $DMU_k$ ،

$$\exists r \;;\; x_{rk} < x_{rj} \quad , \quad j \neq k \quad , \quad j = 1,\dots,n$$

در این صورت $DMU_k$ کارای مدل BCC است .

**اثبات :**

مدل BCC در ماهیت ورودی مفروض است .

$$\begin{aligned}
& \min \ \phi \\
\text{s.t} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \phi x_{ik} \qquad , \qquad i = 1,\dots,m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rk} \qquad , \qquad r = 1,\dots,s \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
& \lambda_j \geq \circ \qquad , \qquad j = 1,\dots,n \\
& s_i^- \geq \circ \qquad , \qquad i = 1,\dots,m
\end{aligned}$$

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$s_r^{+} \geq \circ \qquad , \qquad r = 1,\ldots,s$

فرض می کنیم $(\phi^*,\lambda^*,S^{-*},S^{+*})$ جواب بهینه مدل فوق باشد . ثابت می کنیم

1) $\phi^* = 1$

2) $(S^{-*},S^{+*}) = (0,0)$ در هر جواب بهینه .

اثبات به برهان خلف ، فرض می کنیم چنین نباشد . دو حالت دارد .

حالت اول : $\phi^* < 1$ در این صورت :

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* X_j < X_k$$

وجود دارد $t \neq k$ به طوری که $\lambda_t^* > \circ$

در غیر این صورت اگر $\lambda^* = e_k$ نتیجه می شود $X_k < X_k$ که این تناقض است .

از طرفی بنا بر فرض :

$x_{rk} < x_{r1}$

$\vdots$

$x_{rk} < x_{rt}$

$\vdots$

$x_{rk} < x_{rn}$

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$x_{rk} = x_{rk}$

طرفین روابط فوق را به ترتیب در $\lambda^*_1$ و ... و $\lambda^*_t$ و ... و $\lambda^*_n$ و $\lambda^*_k$ ضرب می کنیم و سپس جمع می کنیم :

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda^*_j x_{rk} < \sum_{j=1}^{n}\lambda^*_j x_{rj}$$

$$x_{rk} < \sum_{j=1}^{n}\lambda^*_j x_{rj}$$

که این تناقض است .

حالت دوم : $(S^{-*},\ S^{+*}) \neq (0,0)$ مانند حالت اول ثابت می شود .

**1-8-7 قضیه**

ثابت کنید اگر برای $DMU_k$ ،

$$\exists r \quad ; \quad y_{rk} > y_{rj} \quad , \quad j \neq k \quad ، \quad j = 1,\dots,n$$

در این صورت $DMU_k$ کارای مدل BCC است .

**اثبات** : مشابه قضیه 1-8-6می باشد .

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

## 1-9 مجموعه مرجع [1]

مدل CCR پوششی (1-3) برای ارزیابی $DMU_k$ مفروض است :

فرض کنید $(\theta^*, \lambda^*, S^{-*}, S^{+*})$ جواب بهینه باشد . مجموعه مرجع $DMU_k$ به صورت زیر تعریف می‌شود .

$$E_k = \bigcup_{\lambda^*} \{DMU_j \mid \lambda^*_j > \circ \quad , \quad j = 1,\dots,n\}$$

1)Refrence Set

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

www.kandoocn.com

# فصل دوم

## تصمیم گیری چند معیاره[1] (MCDM)

### 2-1-مسئله برنامه ریزی چند هدفی

در حالت کلی یک مسئله برنامه ریزی چند هدفی به صورت زیر است :

$$\text{Min } (f_1(x),\ldots,f_n(x)) \qquad (1\text{-}1\text{-}2)$$

$$\text{s.t} \qquad x \in X$$

### 2-2 تعریف جواب کارا (کارای پاراتو)

جواب $\bar{x} \in X$ را یک جواب کارای (کارای پاراتو) مسئله فوق گویند اگر و فقط اگر نتوان $x' \in X$ یافت به طوری که :

1) Multi-Criteria Decision Making

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$$f_i(x') \le f_i(\bar{x}) \qquad i = 1,\dots,n$$

و این نامساوی لااقل در یک مولفه به صورت اکید باشد .

غالباً در بحث MCDM ، توابع هدف در تضاد با یکدیگر هستند .

به عبارت دیگر بهینه کردن یک تابع هدف باعث بدتر شدن بقیه می شود .

اگر توابع هدف در تضاد با یکدیگر نباشند ، در این صورت با بهینه کردن مجموع توابع هدف به راحتی می توان جواب بهینه را بدست آورد .

**3-2 قضیه**

n مساله برنامه ریزی به صورت زیر مفروض است :

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad f_i(x_i) \;, \qquad i = 1,\dots,n \\ &\text{s.t} \quad x_i \in S_i \;, \quad i = 1,\dots n \qquad (1-3-2) \end{aligned}$$

ثابت کنید n مساله به صورت فوق با مساله برنامه ریزی زیر معادل است :

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \qquad (2-3-2) \\ &\text{s.t} \;\; (x_1,\dots,x_n) \in S_1 \times \dots \times S_n \end{aligned}$$

**اثبات :**

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

فرض می کنیم $i=1,\dots,n \quad , \quad X_i^* \in S_i$ جواب های بهینه مساله های برنامه ریزی (2-3-1) باشند

.

در این صورت :

$$(X_1^*,\dots,X_n^*) \in S_1 \times \dots \times S_n$$

یعنی $(X_1^*,\dots,X_n^*)$ جواب شدنی برای مساله (2-3-2) است .

از طرفی بنابر فرض :

$$\forall \ \bar{X}_i \in S_i \quad , \quad i=1,\dots,n$$

$$f_i^*(X_i^*) \le f_i^*(\bar{X}_i) \quad , \quad i=1,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^*(X_i^*) \le \sum_{i=1}^{n} f_i^*(\bar{X}_i)$$

چون $(\bar{X}_1,\dots,\bar{X}_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ دلخواه است . بنابراین نتیجه می شود که :

$(X^*{}_1,\dots,X^*{}_n)$ جواب بهینه (2-3-2) است .

**اثبات عکس :**

فرض می کنیم $(X^*{}_1,\dots,X^*{}_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ جواب بهینه (2-3-2) باشد .

بنابراین $i=1,\dots,n \quad , \quad X_i^* \in S_i$ . یعنی به ازای هر $i$ ، $X_i^*$ جواب شدنی برای

مسئله (2-3-1) است . ثابت می کنیم بهینه است .

فرض می کنیم چنین نباشد یعنی :

www.kandoocn.com

جهت خرید فایل word به سایت www.kandoocn.com مراجعه کنید و یا باشماره های ۰۹۳۶۶۰۲۷۴۱۷ و ۰۹۳۰۳۵۲۲۸۸۶ تماس حاصل نمایید

$$\exists\ \overline{X}_i \in S_i \quad , \quad i=1,\dots,n$$

به طوری که :

$$f_i^*(\overline{X}_i) \le f_i^*(X_i^*) \quad , \quad i=1,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^*(\overline{X}_i) \le \sum_{i=1}^{n} f_i^*(X^*{}_i)$$

اما این متناقض با بهینه بودن $(X^*{}_1,\dots,X^*{}_n)$ برای مسئله (2-3-2) است .

www.kandoocn.com