

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری



مؤسسه آموزش عالی جهاد دانشگاهی استان یزد

عنوان:

# کاربرد تبدیل لاپلاس در تحلیل مدار و انتگرال کانولوشن

استاد راهنما:

.....

دانشجو:

.....

[www.kandoo.cn.com](http://www.kandoo.cn.com)

.....

[www.kandoo.cn.com](http://www.kandoo.cn.com)

[www.kandoo.cn.com](http://www.kandoo.cn.com)

[www.kandoo.cn.com](http://www.kandoo.cn.com)

[www.kandoo.cn.com](http://www.kandoo.cn.com)

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

- ۱ ..... کاربرد تبدیل لاپالس در تحلیل مدار
- ۱ ..... ۱-۱۶ - مقدمه
- ۲ ..... ۲-۱۶ - عناصر مدار در حوزه  $s$
- ۹ ..... ۳-۱۶ - تحلیل مدار در حوزه  $s$
- ۱۰ ..... ۴-۱۶ - چند مثال تشریحی
- ۲۸ ..... ۵-۱۶ - تابع ضربه در تحلیل مدار
- ۴۶ ..... ۶-۱۶ - خلاصه
- ۴۸ ..... ۵-۱۷ - تابع تبدیل و انتگرال کانولوشن
- ۶۴ ..... مراجع

[www.kandoo.cn.com](http://www.kandoo.cn.com)

[www.kandoo.cn.com](http://www.kandoo.cn.com)

کاربرد تبدیل لاپالس در تحلیل مدار

۱۶-۱- مقدمه

تبدیل لاپالس دو ویژگی دارد که آن را به ابزاری جالب توجه در تحلیل مدارها تبدیل کرده است. نخست به کمک آن می توان مجموعه ای از معادلات دیفرانسیلی خطی با ضرایب ثابت را به معادلات چند جمله ای خطی تبدیل کرد. دوم، در این تبدیل مقادیر اولیه متغیرهای جریان و ولتاژ خود به خود وارد معادلات چند جمله ای می شوند. بنابراین شرایط اولیه جزء لاینفک فرایند تبدیل اند. اما در روشهای کلاسیک حل معادلات دیفرانسیل شرایط اولیه زمانی وارد می شوند که می خواهیم ضرایب مجهول را محاسبه کنیم.

هدف ما در این فصل ایجاد روشی منظم برای یافتن رفتار گذرای مدارها به کمک تبدیل لاپلاس است. روش پنج مرحله ای بر شمرده شده در بخش ۱۵-۷ اساس این بحث است. اولین گام در استفاده موثر از روش تبدیل لاپلاس از بین بردن ضرورت نوشتن معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی توصیف کننده مدار است. برای این منظور باید مدار هم از مدار را در حوزه  $s$  به دست آوریم. این امر به ما امکان می دهد که مداری بسازیم که مستقیماً در حوزه تحلیل شود بعد از فرمولبندی مدار در حوزه  $s$  می توان از روشهای تحلیلی بدست آمده (نظیر روشهای ولتاژ گره، جریان خانه و ساده سازی مدار) استفاده کرد و معادلات جبری توصیف کننده مدار را نوشت. از حل این معادلات جبری، جریانها و ولتاژهای مجهول به

صورت توابعی گویا به دست می آیند که تبدیل عکس آنها را به کمک تجزیه به کسرهای ساده به دست می آوریم. سرانجام روابط حوزه زمانی را می آزماییم تا مطمئن شویم که جوابهای به دست آمده با شرایط اولیه مفروض و مقادیر نهایی معلوم سازگارند.

در بخش ۱۶-۲- هم از عناصر را در حوزه S به دست می آوریم. در شروع تحلیل مدارهای حوزه S باید دانست که بعد ولتاژ تبدیل شده ولت ثانیه و بعد جریان تبدیل شده آمپر ثانیه است. بعد نسبت ولتاژ به جریان در حوزه S ولت بر آمپر است و بنابراین در حوزه S یکای پاگیری ( امیدانس) اهم و یکای گذارایی ( ادمیتانس) زیمنس یا مو است.

۱۶-۲- عناصر مدار در حوزه S

روش به دست آوردن مدار هم از عناصر مدار در حوزه S ساده است. نخست رابطه ولتاژ و جریان عنصر در پایانه هایش را در حوزه زمان می نویسم. سپس از این معادله تبدیل لاپلاس می گیریم به این طریق رابطه جبری میان ولتاژ و جریان در حوزه S به دست می آید. سرانجام مدلی می سازیم که رابطه میان جریان و ولتاژ در حوزه S را برآورد سازد. در تمام این مراحل قرارداد علامت منفی را به کار می بریم.

نخست از مقاومت شروع میکنیم، بنا به قانون اهم داریم

$$v = Ri \quad (1-16)$$

از آنجا که R ثابت است، تبدیل لاپلاس معادله (۱-۱۶) چنین است .

$$V=RI \quad (2-16)$$

که در آن

$$I = \{i\}, V = \{v\}$$

بنا به معادله (۱۶-۲) مدار هم ارز یک مقاومت در حوزه  $s$  مقاومتی برابر  $R$  اهم است که

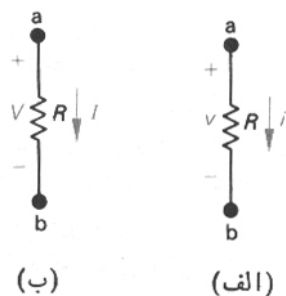
جریان آن  $I$  آمپر - ثانیه و ولتاژ آن  $V$  ولت - ثانیه است.

مدارهای مقاومت در حوزه زمان و حوزه بسامد در شکل ۱-۱۶ دیده می شود به یاد داشته

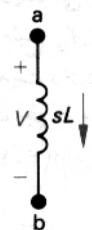
باشید که در تبدیل مقاومت از حوزه زمان به حوزه بسامد تغییری در آن ایجاد نمی شود.

القاگری با جریان اولیه  $I_0$  در شکل ۲-۱۶ آمده است. معادله ولتاژ و جریان آن در حوزه

زمان چنین است.



شکل ۱-۱۶ - مقاومت در الف) حوزه زمان، ب) حوزه بسامد.



شکل ۲-۱۶ - القاگر  $L$  هانری با جریان اولیه  $I_0$  آمپر.

در حوزه زمان چنین است

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (۱۶-۳)$$

پس از تبدیل لاپلاس گرفتن از معادله (۳-۱۶) داریم

$$V = L[sI - i(0^-)] \quad (۴-۱۶)$$

$$= SLI - LI_0$$

به کمک دو مدار مختلف می توان معادله (۴-۱۶) را تحقق بخشید. مدار هم از اول مداری

است متشکل از یک امپدانس  $sL$  اهمی که با یک منبع ولتاژ مستقل  $LI_0$  ولت ثانیه ای متوالی

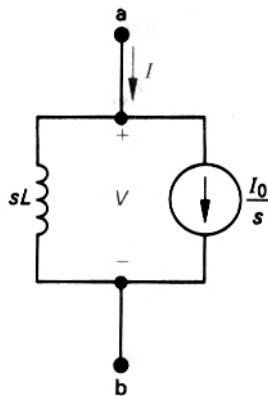
است. این مدار در شکل ۳-۱۶ دیده می شود در بررسی مدار هم ارز حوزه بسامدی شکل

۳-۱۶ توجه کنید که جهت ولتاژ منبع  $LI_0$  بر مبنای علامت منفی موجود در معادله (۴-۱۶)

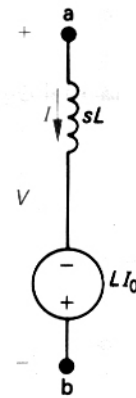
است توجه به این نکته نیز اهمیت دارد که  $I_0$  علامت جبری مخصوص به خود را دارد.

یعنی چنانچه مقدار اولیه  $I$  خلاف جهت مبنای  $I$  باشد آنگاه  $I_0$  مقدار منفی دارد.

مدار هم از دیگری که معادله (۴-۱۶) را برآورده، می سازد متشکل است از یک امپدانس



شکل ۴-۱۶- مدار هم ارزی موازی یک القاگر  $L$  هانری با جریان اولیه  $I_0$  آمپر.



شکل ۳-۱۶ مدار هم ارز متوالی یک القاگر  $L$  هانری با جریان اولیه  $I_0$  آمپر.

$sL$  اهمی که با یک منبع جریان مستقل  $I_0/s$  آمپر ثانیه ای موازی است. این مدار هم ارز در

شکل ۴-۱۶ آمده است.

برای به دست آوردن مدار هم از شکل ۱۶-۴ راههای مختلفی موجود است. یکی از این راهها حل معادله (۱۶-۴) نسبت به جریان  $I$  و ساخت مداری بر حسب معادله به دست آمده بنابراین

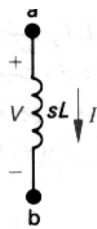
$$I = \frac{V + LI_0}{sL} = \frac{V}{sL} + \frac{I_0}{s} \quad (16-5)$$

به سادگی مشاهده می شود که مدار شکل ۱۶-۴ معادله (۱۶-۵) را برآورده می سازد دو راه دیگر به دست آوردن مدار شکل ۱۶-۴ عبارت اند از (۱) به دست آوردن هم از نور تن مدار شکل (۱۶-۳)، (۲) به دست آوردن جریان القا گر بر حسب ولتاژ آن و گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله به دست آمده این دو روش به صورت تمرین در مسائل ۱۶-۱ و ۱۶-۲ به خواننده واگذار می شود.

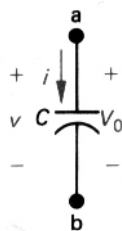
قابل توجه است که هرگاه انرژی اولیه ذخیره شده در القا گر صفر باشد یعنی اگر  $I_0=0$  مدار هم ارز القا گر در حوزه بسامد به صورت القا گری با امپدانس  $sL$  اهم در می آید. این مدار در شکل ۱۶-۵ آمده است.

برای خازنهای با بار اولیه نیز دو مدار هم ارز در حوزه  $s$  وجود دارد. خازنی که با بار اولیه  $V_0$  ولت در شکل ۱۶-۶ دیده می شود. جریان خازن چنین است.





شکل ۵-۱۶ مدار خوزه بسامدی القاگری با جریان اولیه صفر.



شکل ۶-۱۶ خازنی C فارادی که تا  $V_0$  ولت بار دار شده است.

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (6-16)$$

پس از تبدیل معادله (۶-۱۶) داریم

$$I = C[sV - v(0^-)]$$

یا

$$I = sCV - CV_0 \quad (7-16)$$

از معادله فوق دیده می شود که جریان I در حوزه بسامد از دو جریان شاخه ای تشکیل می

شود یکی از شاخه ها از یک گذارایی به مقدار sC مو و دیگری از یک منبع جریان مستقل

$CV_0$  آمپر ثانیه ای تشکیل می شود. این مدار هم ارز در شکل ۷-۱۶ آمده است.

از حل معادله (۷-۱۶) نسبت به V می توان مدار هم ارز متوالی خازن باردار را به دست

آورد. بنابراین داریم

$$V = \left(\frac{1}{sC}\right)I + \frac{V_0}{s} \quad (8-16)$$

مداری که در شکل ۸-۱۶ آمده است تحقق معادله (۸-۱۶) است.

در مدارهای هم ارز شکل‌های ۷-۱۶ و ۸-۱۶،  $V_0$  علامت جبری خود را دارد. یعنی اگر

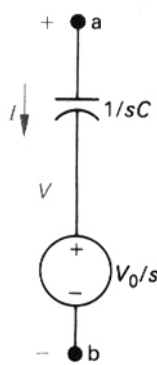
جهت  $V_0$  خلاف جهت مبنای  $v$  باشد  $V_0$  مقداری منفی خواهد بود. اگر ولتاژ اولیه خازن

صفر باشد مدارهای هم ارز ساده می‌شوند و تنها امپدانس  $1/sC$  اهمی باقی می‌ماند که در

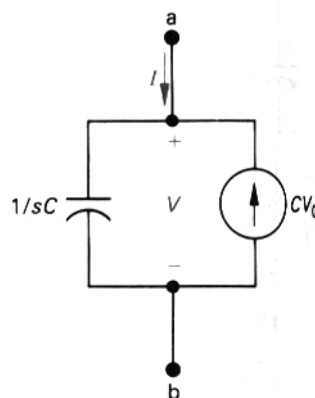
شکل ۹-۱۶ آمده است.

مدارهای حوزه بسامدی به دست آمده در این بخش در جدول ۱-۱۶ آمده اند. کاربرد این

مدارها در بخش ۴-۱۶ نشان داده خواهد شد.



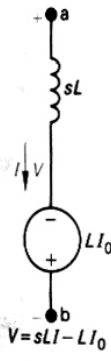
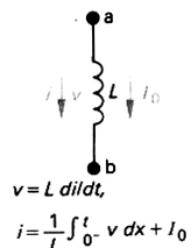
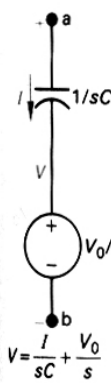
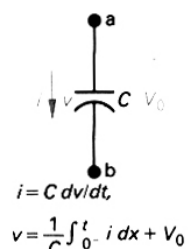


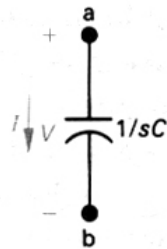
شکل ۸-۱۶ مدار هم ارز متوالی خازنی که تا  $V_0$  ولت باردار شده است.



شکل ۷-۱۶ مدار هم ارز موازی خازنی که تا  $V_0$  ولت باردار شده است.

جدول ۱۰۱۶ مدارهای هم ارز در حوزه S

حوزه بسامد (فرکانس)	حوزه زمان
 <p><math>V = RI</math></p>	 <p><math>v = Ri</math></p>
 <p><math>V = sLI - LI_0</math></p>	 <p><math>v = L \frac{di}{dt}</math>, <math>i = \frac{1}{L} \int_0^t v dx + I_0</math></p>
 <p><math>V = \frac{I}{sC} + \frac{V_0}{s}</math></p>	 <p><math>i = C \frac{dv}{dt}</math>, <math>v = \frac{1}{C} \int_0^t i dx + V_0</math></p>



شکل ۱۶-۹ مدار حوزه بسامدی خازنی با ولتاژ اولیه صفر

۱۶-۳- تحلیل مدار در حوزه  $s$

پیش از بررسی مدارها در حوزه  $s$  به ذکر چند نکته می پردازیم که اساس تمام کارهای بعدی ماست.

نخست میدانیم که چنانچه در القا گر و خازنها انرژی اولیه نداشته باشیم رابطه ولتاژ و جریان آنها چنین است.

$$V=ZI \quad (9-16)$$

که در آن  $Z$  امپدانس (پاگیری) عنصر در حوزه  $s$  است. به این ترتیب امپدانس مقاومت  $R$  اهم، امپدانس القا گر  $sL$  اهم، و امپدانس خازن  $1/sC$  اهم است. نکته ای که در معادله (۱۶-۹)

(۹) آمده است، در شکل‌های ۱۶-۱(ب)، ۱۶-۵، و ۱۶-۹ مشخص شده است. گاه معادله (۱۶-۹) را قانون اهم در حوزه  $s$  می نامند.

عکس پاگیری، گذارایی، گذاراییها در حوزه  $s$  دقیقاً همان قواعد ترکیب آنها در حوزه فازبرداری است. در تحلیل حوزه بسامدی می توان از ساده کردنهای متوالی و موازی و تبدیلیهای ستاره - مثلث استفاده کرد.

نکته مهم دیگر این است که قوانین کبرشلف را می توان برای جریانها و ولتاژهای حوزه  $s$  به کار برد. دلیل این امر این است که بنا به خواص تبدیل عملیات، تبدیل لاپلاس مجموع چند تابع در حوزه زمان برابر مجموع تبدیل لاپلاسهای یکایک توابع است (جدول ۱۵-۲ را ببینید) بنابراین از آنجا که جمع جبری جریانها در یک گروه در حوزه زمان صفر است،

جمع جبری جریانهای تبدیل شده نیز صفر خواهد بود. همچنین جمع جبری ولتاژهای تبدیل شده حول مسیری بسته صفر است. قوانین کیرشهف در حوزه  $s$  چنین اند.

$$\sum (I \text{ ها}) = 0 \quad (16-10)$$

$$\sum (V \text{ ها}) = 0 \quad (16-11)$$

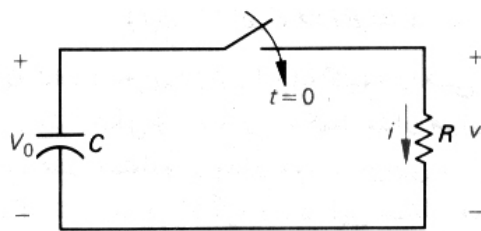
نکته سوم مبتنی بر درک مفاهیم نهفته در دو نکته اول است. از آنجا که ولتاژ و جریان در پایانه های عناصر غیر فعال به وسیله معادلاتی جبری به هم مربوط می شوند و قانون کیرشهف همچنان برقرار است، پس کلیه روشهای تحلیل شبکه های مقاومتی را میتوان در تحلیل مدارها در حوزه بسامد به کار برد. بنابراین حتی اگر در القا گرها و خازنها انرژی اولیه ذخیره شده باشد روشهای ولتاژ گر، جریان خانه، تبدیل منابع، هم ارزهای تونن-نورتن و روشهای معتبری هستند. چنانچه در مدار انرژی اولیه ذخیره شده باشد باید معادله (16-9) را تغییر داد این تغییر بسیار ساده است و کافی است به کمک قوانین کیرشهف منابع مستقل لازم را با امپدانس عناصر موازی یا متوالی کرد.

16-4 چند مثال تشریحی

برای نشان دادن چگونگی استفاده از تبدیل لاپلاس در تعیین رفتار گذرای مدارهای خطی با پارامترهای فشرده، مدارهای تحلیل شده در فصلهای 6، 7 و 8 را به کار می بریم. علت تحلیل این مدارهای آشنا این است که وقتی در یابیم نتایج به دست آمده با نتایج قبلی یکسان است، به توانایی خود در تحلیل مدارها به کمک روش تبدیل لاپلاس اطمینان می یابیم.

نخستین مداری که تحلیل خواهیم کرد مدار شکل ۱۶-۱۰ است. بار اولیه خازن  $V_0$  ولت است و می خواهیم روابط  $i$  و  $v$  را در حوزه زمان به دست آوریم. از آنجا که این مدار قبلاً در فصل ۶ تحلیل شده است می توانید پیش از پرداختن به تحلیل حاضر، بخش ۶-۳ را مرور کنید.

کار را با یافتن  $i$  شروع می کنیم. برای تبدیل مدار شکل ۱۶-۱۰ به حوزه  $s$  دو مدار هم ارز برای خازن باردار وجود دارد. از آنجا که مطلوب ما جریان است مدار هم ارز متوالی جالبتر است زیرا به کمک آن به مداری با تنها یک خانه در حوزه بسامد دست می یابیم.



شکل ۱۶-۱۰- مدار تخلیه خازن

بنابراین مدار حوزه بسامدی شکل ۱۶-۱۱ را می سازیم.

از جمع ولتاژها حول خانه شکل ۱۶-۱۱ داریم.

$$\frac{V_0}{s} = \frac{1}{sC} I + RI \quad (12-16)$$

از حل معادله (۱۶-۱۲) نسبت به  $I$  داریم

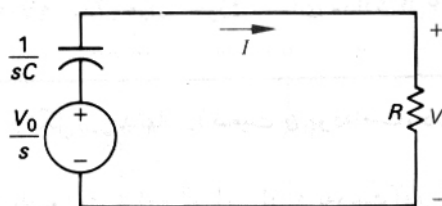
$$I = \frac{CV_0}{RCs + 1} = \frac{V_0/R}{s + (1/RC)} \quad (13-16)$$

رابطه  $i$  تابعی گویای سره از  $s$  است و با نگاهی به آن می تواند تبدیل عکس آن را به دست آورد

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} u(t) \quad (14-16)$$

چون  $\tau = RC$  ، این رابطه همان رابطه جریان به دست آمده به کمک روشهای کلاسیک در فصل ۶ است ( معادله ۱۶-۱۲ را ببینید).

اکنون  $v$  ولتاژ را می یابیم. البته وقتی جریان  $i$  معلوم باشد ساده ترین راه برای تعیین استفاده از قانون اهم است. یعنی داریم.



شکل ۱۶-۱۱- مدار هم ارز حوزه بسامدی مدار شکل ۱۶-۱۰

$$v = Ri = V_0 e^{-t/Rc} u(t) \quad (15-16)$$

اکنون بدون اینکه نخست جریان  $i$  را پیدا کنیم، راهی برای پیدا کردن  $v$  نشان می دهیم. برای این منظور مدار شکل ۱۶-۱۰ را به کمک مدار هم ارز موازی خازن باردار به حوزه  $s$  تبدیل می کنیم. علت استفاده از مدار هم ارز موازی در اینجا این است که به این طریق به مداری می رسیم که تنها یک ولتاژ گره دارد. این مدار هم ارز حوزه بسامدی در شکل ۱۶-۱۲ آمده است.

معادله ولتاژ گره توصیف کننده مدار شکل ۱۶-۱۲ چنین است.

$$\frac{V}{R} + sCV = CV_0 \quad (16-16)$$

از حل این معادله نسبت به  $V$  داریم

$$V = \frac{V_0}{s + (1/RC)} \quad (17-16)$$

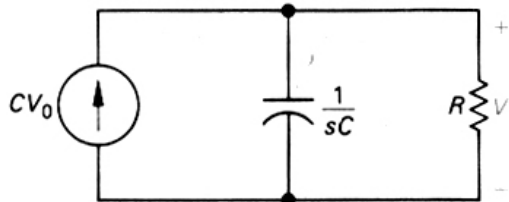
پس از گرفتن تبدیل عکس از معادله (17-16) همان رابطه  $v$  معادله (12-16) به دست می

آید یعنی داریم

$$v = V_0 e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/\tau} u(t) \quad (18-16)$$

هدف ما از تعیین  $v$  با استفاده مستقیم از روش تبدیل این بود که نشان دهیم انتخاب مدار

هم ارز در حوزه  $s$  به نوع پاسخ مطلوب بستگی دارد.



شکل ۱۲-۱۶ مدار هم ارز حوزه بسامدی مدار شکل ۱۰-۱۶

مدار RLC تحلیل شده در مثال ۸-۶ دومین مداری است که به تحلیل آن می پردازیم، این

مدار دوباره در شکل ۱۶-۱۳ آمده است. مطلوب ما یافتن رابطه  $I_L$  است. پس از اینکه منبع

جریان ثابت به عناصر موازی اعمال می شود انرژی اولیه ذخیره شده در مدار صفر است.

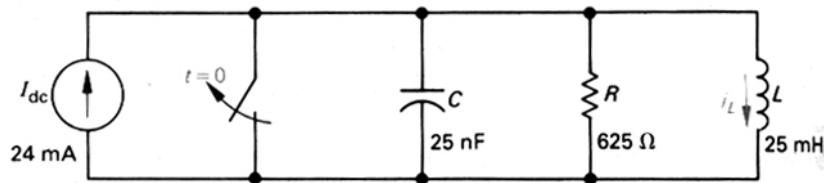
مانند گذشته نخست مدار هم ارز را در حوزه بسامد به دست می آوریم. این مدار هم ارز

در شکل ۱۶-۱۴ آمده است. توجه کنید که تبدیل منبع مستقل از حوزه زمان به حوزه بسامد

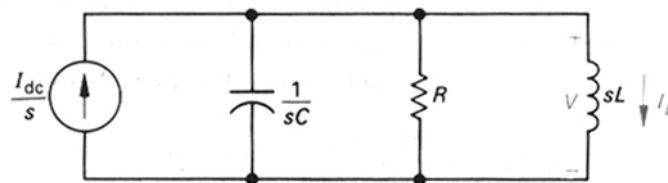
چقدر ساده است. برای تبدیل منابع به حوزه  $s$  کافی است. تبدیل لاپلاس تابع حوزه زمانی



منبع را به دست آوریم. در این مسئله باز کردن کلید منجر به تغییری پله ای در جریان اعمالی به مدار می شود. بنابراین منبع جریان در حوزه  $s$  برابر است با  $\mathcal{L}\{I_{dc}(u)t\}$  یا  $I_{dc}/s$  برای یافتن  $I_L$  نخست  $V$  را می یابیم و سپس از رابطه زیر رابطه  $I_L$  را در حوزه  $s$  به دست می آوریم.



شکل ۱۶-۱۳- پاسخ پله یک مدار RLC موازی.



شکل ۱۶-۱۴- مدار هم ارز مدار شکل ۱۶-۱۳ در حوزه  $s$

$$I_L = \frac{V}{sL} \quad (16-19)$$

از جمع جریانهای خارج شونده از گره بالای مدار شکل ۱۶-۱۴ داریم

$$sCV + \frac{V}{R} + \frac{V}{sL} = \frac{I_{dc}}{s} \quad (16-20)$$

حال معادله (۱۶-۲۰) را نسبت به  $V$  حل می کنیم.

$$V = \frac{I_{dc}/C}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \quad (16-21)$$

با قرار دادن مقدار  $V$  در معادله (۱۶-۱۹) داریم.

$$V = \frac{I_{dc}/C}{s(s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC})} \quad (22-16)$$

با قرار دادن مقادیر عددی  $I_{dc}, C, L, R$  در معادله (۲۲-۱۶) داریم

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s^2 + 6400s + 16 \times 10^8)} \quad (23-16)$$

قبل از تجزیه معادله (۲۳-۱۶) به کسرهای ساده، مخرج را به حاصلضرب عوامل تجزیه می کنیم. پس داریم.

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s + 32000 - j2400)(s + 32000 + j2400)} \quad (24-16)$$

در اینجا می توان به کمک قضیه مقدار نهایی و جوابی که این قضیه برای  $I_L$  در  $t = \infty$  پیش بینی می کند، رابطه  $I_L$  را در حوزه بسامد آزمود. نخست می دانیم که همه قطبهای  $I_L$  جز قطب مرتبه اول واقع در مبدا در نیمه چپ صفحه  $s$  جای دارند، بنابراین می توان قضیه مقدار نهایی را در این مسئله به کار برد. از رفتار مدار می دانیم که پس از باز شدن کلید به مدت طولانی القاگر منبع جریان را اتصال کوتاه خواهد کرد. بنابراین مقدار نهایی  $I_L$  باید  $24 \text{ mA}$  باشد حد  $sI_L$  وقتی  $s \rightarrow 0$  چنین است.

$$\lim(sI_L) = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} = 24 \text{ mA} \quad (25-16)$$

(از آنجا که ابعاد جریان در حوزه  $s$  آمپر ثانیه است، بعد  $sI_L$  آمپر خواهد بود.)

حال تابع معادله (۲۴-۱۶) را به کسرهای ساده تجزیه می کنیم. داریم.

$$I_L = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + 32000 - j24000} + \frac{k_2}{s + 32000 + j24000} \quad (26-16)$$

ضرایب این بسط چنین اند.

$$k_1 = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} 24 \times 10^3 \quad (27-16)$$

$$k_1 = \frac{384 \times 10^5}{(-32000 + j24000)(j48000)} = 20 \times 10^{-3} \sqrt{126,87^\circ} \quad (28-16)$$

با قرار دادن مقادیر عددی  $k_1$  و  $k_2$  در معادله (26-16) و گرفتن تبدیل عکس داریم.

$$i_L = [24 + 40e^{-32000t} \cos(24000t + 126,87^\circ)]u(t) \text{mA} \quad (29-16)$$

از آنجا که داریم

$$40 \cos(24000t + 126,87^\circ) = -24 \cos 24000t - 32 \sin 24000t$$

جواب معادله (29-16) با جواب مثال 8-6 یکسان است.

برای بررسی صحت نتایج که به معادله (29-16) انجامیده است می توانیم غیر از مقایسه آن

با نتایج مثال 8-6 به این طریق عمل کنیم که بررسی کنیم که آیا  $I_L(0)$  و  $i_L(\infty)$  شرایط اولیه

و رفتار معلوم مدار در حالت ماندگار را برآورده می سازد یا نه؟

مثال سومی که به کمک تبدیل لاپلاس پاسخ گذاری آن را بررسی می کنیم، مدار شکل 16-

13 است که در آن به جای dc منبع سینوسی قرار داده ایم. معادله منبع جریان چنین است.

$$i_g = I_m \cos \omega t A \quad (30-16)$$

که در آن  $I_m = 24\text{mA}$  و  $\omega = 40000\text{rad}$  کما کان فرض می کنیم انرژی اولیه ذخیره شده در مدار صفر است. رابطه جریان منبع در حوزه  $s$  برابر است با

$$I_g = \frac{sI_m}{s^2 + \omega^2} \quad (31-16)$$

ولتاژ دو سر عناصر موازی چنین است

$$V = \frac{(I_g / C)s}{s^2 + (sRC) + (1/LC)} \quad (32-16)$$

از قرار دادن معادله (31-16) در معادله (32-16) داریم

$$V = \frac{(I_m / C)s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC})} \quad (33-16)$$

که از آن چنین به دست می آید.

$$I_L = \frac{V}{sL} = \frac{(I_m / LC)s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC})} \quad (34-16)$$

با قرار دادن مقادیر عددی  $I_m, \omega, C, L, R$  در معادله (34-16) داریم

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s^2 + 16 \times 10^8) / (s^2 - 64000 + 16 \times 10^8)} \quad (35-16)$$

حال منخرج معادله فوق را به حاصل ضرب عوامل تجزیه می کنیم

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s - ja)(s + ja)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)} \quad (36-16)$$

که در آن  $\beta = 24000$   $\alpha = 32000$   $a = 40000$

مقدار نهایی  $I_L$  را نمی توان به کمک قضیه مقدار نهایی آزمود زیرا  $I_L$  یک جفت قطب بر روی محور موهومی در  $\pm j4 \times 10^4$  دارد. بنابراین باید نخست  $I_L$  را بیابیم و صحت این رابطه را به کمک رفتار معلوم مدار بررسی کنیم.

از تجزیه معادله (۱۶-۳۶) به کسرهای ساده داریم.

$$I_L = \frac{k_1}{s - j2400} + \frac{k_2}{s + j24000}$$

$$I_L = \frac{k_2}{s + 32000 - j2400} + \frac{k_2}{s + 32000 + j24000} \quad (۱۶-۳۷)$$

مقادیر عددی ضرایب  $k_1$  و  $k_2$  چنین است.

$$k_1 = \frac{384 \times 10^5 (j40000)}{(j80000)(3200 + j16000)(32000 + j64000)} = 7.5 \times 10^{-3} - 90^\circ$$

$$k_2 = \frac{384 \times 10^5 (-32000 + j40000)}{(-3200 + j16000)(-32000 + j64000)j48000} = 12.5 \times 10^{-3} - 90^\circ \quad (۱۶-۳۸)$$

با قرار دادن مقادیر عددی  $k_1$  و  $k_2$  در معادله (۱۶-۳۷) و گرفتن تبدیل عکس از آن داریم.

$$i_L = [15 \cos(4000t - 90^\circ) + 25e^{-3200t} \cos(2400t + 90^\circ)] \text{mA}$$

$$= [15 \sin 4000t - 25e^{-3200t} \sin 2400t] u(t) \text{mA} \quad (۱۶-۴۰)$$

حال باید بررسی کنیم که آیا معادله (۱۶-۴۰) با شرایط اولیه مفروض و رفتار معلوم مدار

(مقدار نهایی) پس از اینکه مدت‌ها باز بماند هماهنگی دارد به ازای  $t=0$  بنابه معادله (۱۶-۴۰)

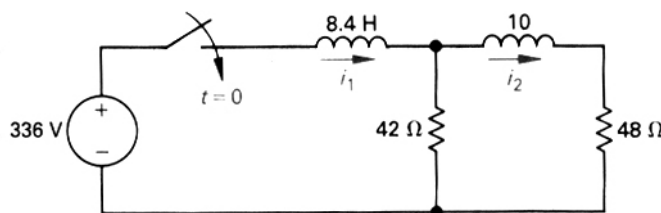
جریان اولیه صفر است که با صفر بودن انرژی اولیه مدار سازگار است. جریان حالت

ماندگار بر مبنای معادله (۱۶-۴۰) چنین است.

$$i_{Lss} = 15 \sin 400 \text{ mA} \quad (16-41)$$

که می توان صحت آن را به کمک روش فاز برداری فصل ۱۰ بررسی کرد و این امر به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

مدار مثال چهارم در شکل ۱۵-۱۶ آمده است. می خواهیم جریانهای  $I_1$  و  $I_2$  را پس از اینکه ناگهان منبع ولتاژ dc و  $336 \text{ V}$  به مدار اعمال می شود به دست آوریم. انرژی اولیه ذخیره شده در مدار صفر است. این نوع پاسخهای گذر را نمی توان به کمک روشهای تحلیلی فصل ۷ به دست آورد زیرا منجر به حل دستگاهی شامل دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول می شود.



شکل ۱۵-۱۶- مدار چند RL چند خانه ای

گرچه برای حل دستگاههای معادلات دیفرانسیلی در حوزه زمان روشهایی موجود است، در این کتاب ترجیح می دهیم که چنین راه حلهایی ارائه نشود. اما از آنجا که به کمک روش تبدیل لاپلاس معادله های دیفرانسیلی به معادله های جبری تبدیل می شوند، این مدار را از همین روش و نیز به کمک روش جریان خانه تحلیل می کنیم.

مدار هم ارز حوزه بسامدی مدار شکل ۱۵-۱۶ در شکل ۱۶-۱۶ آمده است. دو معادله

جریان خانه این مدار عبارت اند از

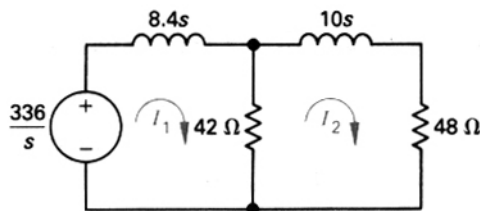
$$\frac{336}{s} = (42 + 8.4s)I_1 - 42I_2 \quad (۴۲-۱۶)$$

$$0 = -42I_1 + (90 + 10s)I_2 \quad (۴۳-۱۶)$$

به کمک روش کرامر  $I_1$  و  $I_2$  را چنین به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 42 + 8.4s & -42 \\ -42 & 90 + 10s \end{vmatrix} \\ &= 84(s^2 + 14s + 24) \\ &= 84(s + 2)(s + 12) \end{aligned} \quad (۴۴-۱۶)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \begin{vmatrix} \frac{336}{s} & -42 \\ 0 & 90 + 10s \end{vmatrix} \\ &= \frac{336 \cdot (s + 9)}{s} \end{aligned} \quad (۴۵-۱۶)$$



شکل ۱۶-۱۶- مدار هم ارز مدار شکل ۱۵-۱۶ در حوزه s.

$$\begin{aligned} N_2 &= \begin{vmatrix} 8.4s + 42 & \frac{336}{s} \\ -42 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{14112}{s} \end{aligned} \quad (۴۶-۱۶)$$

بنا به معادله های (۴۴-۱۶)، (۴۵-۱۶) و (۴۶-۱۶) داریم.

$$I_1 = \frac{N_1}{\Delta} = \frac{40(s+9)}{s(s+2)(s+12)} \quad (47-16)$$

و

$$I_2 = \frac{N_2}{\Delta} = \frac{168}{s(s+2)(s+12)} \quad (48-16)$$

با تجزیه  $I_1$  و  $I_2$  به کسرهای ساده داریم.

$$I_1 = \frac{15}{s} - \frac{14}{s+2} - \frac{1}{s+12} \quad (49-16)$$

$$I_2 = \frac{7}{s} - \frac{8,4}{s+2} + \frac{1,4}{s+12} \quad (50-16)$$

حال با گرفتن تبدیل عکس از معادله (49-16) و (50-16) روابط  $i_1$  و  $i_2$  به ترتیب چنین به

دست می آیند.

$$i_1 = (15 - 14e^{-2t} - e^{-12t})u(t)A \quad (51-16)$$

$$i_2 = [7 - 8,4e^{-2t} + 1,4e^{-12t}]u(t)A \quad (52-16)$$

اکنون باید صحت نتایج به دست آمده و همخوانی آنها را با مدار بررسی کنیم. از آنجا که در

لحظه بسته شدن کلید، انرژی ذخیره شده در مدار موجود نبود  $i_2(0^-)$ ،  $i_2(0^-)$ ، باید صفر

باشند. جوابهای به دست آمده با این مقادیر سازگارند. پس از اینکه از بسته شدن کلید مدتی

طولانی بگذرد، القاگرها به صورت اتصال کوتاه در می آیند. بنابراین مقدار نهایی  $i_1$  و  $i_2$  برابر

خواهند بود با

$$i_1(\infty) = \frac{336(90)}{(42)(48)} = 15A \quad (53-16)$$



و

$$i_2(\infty) = \frac{15(42)}{90} = 7A \quad (16-54)$$

جوابهای به دست آمده با این مقادیر نهایی نیز سازگارند.

آخرین بررسی که شامل مقادیر عددی نماها می شود، محاسبه افت ولتاژ در مقاومت  $42-\Omega$  با سه روش مختلف است. با توجه به مدار مشاهده می کنیم که ولتاژ مقاومت  $42-\Omega$  ( اگر ولتاژ گره مقاومت بالایی را مثبت بگیریم) چنین است.

$$v = 42(i_1 - i_2) = 336 - 84 \frac{di_1}{dt} = 48i_2 + 10 \frac{di_2}{dt} \quad (16-55)$$

اثبات این نکته را به خواننده واگذار می کنیم که اگر از هر کدام از شکلهای معادله (16-55)

(55) استفاده کنیم ولتاژ برابر است با

$$v = (336 - 235.2e^{-2t} - 10080e^{-12t})u(t)V$$

پس مطمئن می شویم که جوابهای  $i_1$  و  $i_2$  صحیح هستند.

در مثال بعدی چگونگی استفاده از هم ارز تونن در حوزه  $s$  نشان داده می شود. مداری که

قرار است تحلیل شود شکل 16-17 است. می خواهیم پس از بسته شدن کلید جریان خازن

را بیابیم. انرژی ذخیره شده در مدار قبل از بسته شدن کلید صفر است.

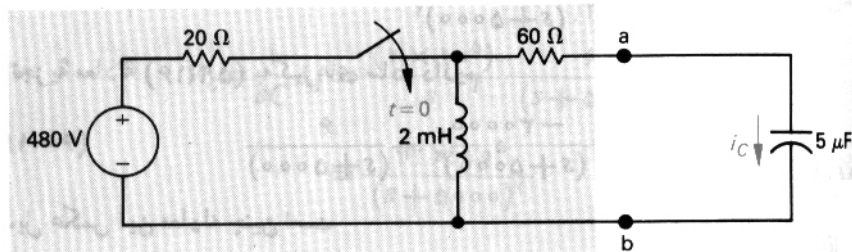
برای به دست آوردن  $I_c$  نخست مدار هم ارز مدار شکل 16-17 را در حوزه  $s$  می سازیم و

سپس هم ارز تونن مدار حوزه بسامدی را نسبت به پایانه های خازن به دست می آوریم.

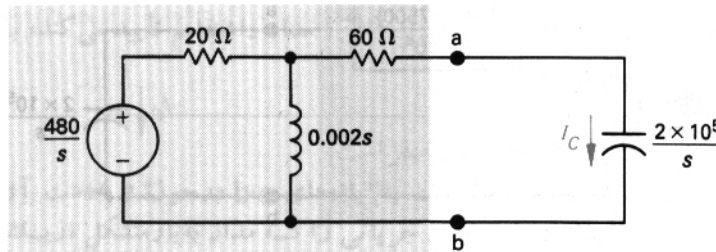
مدار هم ارز حوزه بسامدی در شکل 16-18 آمده است.

ولتاژ توتن برابر با ولتاژ مدار- باز در پایانه های a,b است. در شرایط باز بودن مدار ولتاژی

در مقاومت  $60\text{-}\Omega$  نخواهد بود، پس



شکل ۱۶-۱۷- مداری که به کمک آن استفاده از هم ارز توتن در حوزه s تشریح می شود.



شکل ۱۶-۱۸- هم ارز حوزه بسامدی مدار شکل ۱۶-۱۷.

$$V_t = \frac{(480/s)(0/002s)}{20 + 0/002s} = \frac{480}{s + 10^4} \quad (56-16)$$

امپدانس توتن که از پایانه های a,b دیده می شود برابر ترکیب متوالی مقاومت  $60\text{-}\Omega$  با

ترکیب موازی  $60\text{-}\Omega$  و القا گر  $2\text{-mH}$  است، بنابراین

$$Z_t = 60 + \frac{0/002s(20)}{20 + 0/002s} = \frac{80(s + 7500)}{s + 10^4} \quad (57-16)$$

به کمک هم ارز توتن مدار، شکل ۱۶-۱۸ به صورت مدار شکل ۱۶-۱۹ در می آید که با

توجه به آن جریان خازن،  $I_c$ ، برابر خارج قسمت ولتاژ توتن به امپدانس متوالی کل است.

بنابراین

$$I_c = \frac{280/(s + 10^4)}{[80(s + 7500)/(s + 10^4)] + [2 \times 10^5]/s} \quad (58-16)$$

که پس از ساده کردن داریم

$$I_c = \frac{6s}{s^2 + 10000s + 25 \times 10^6}$$

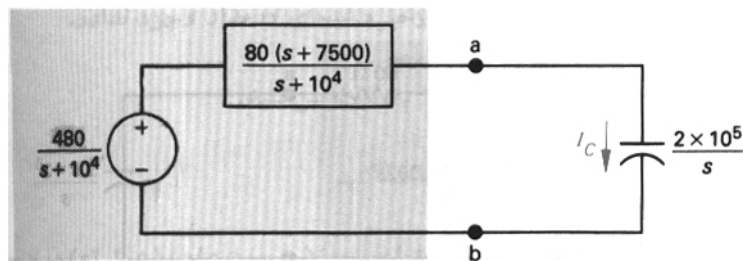
$$= \frac{6s}{(s + 5000)^2} \quad (59-16)$$

از تجزیه معادله (59-16) به کسرهای ساده داریم

$$I_c = \frac{-30000}{(s + 5000)^2} + \frac{6}{(s + 5000)} \quad (60-16)$$

تبدیل عکس این معادله چنین است

$$i_c = \frac{-30000}{(s + 5000)^2} + \frac{6}{(s + 5000)} \quad (61-16)$$



شکل ۱۶-۱۹ مدار ساده شده مدار شکل ۱۶-۱۸ به کمک هم ارز تونن

حال همخوانی این معادله را با رفتار مدار بررسی می کنیم. بنا به معادله (61-16) داریم

$$i_c(0) = 6A \quad (62-16)$$

این مقدار با توجه به مدار شکل ۱۶-۱۷ با جریان اولیه سازگار است زیرا جریان اولیه القاگر و ولتاژ اولیه خازن صفر است. بنابراین جریان اولیه خازن  $480/80$  یا  $6A$  است. مقدار نهایی جریان صفر است که با معادله (61-16) نیز می خواند.

همچنین با توجه به معادله (61-16) هرگاه  $t$  از  $6/300000$  یا  $200 \mu s$  بیشتر شود جهت جریان عوض می شود. تغییر علامت  $I_c$  از آنجا ناشی می شود که پس از بسته شدن کلید خازن

شروع به پر شدن می کند. چون القاگر در اتصال کوتاه می شود خازن نهایتاً تخلیه می شود. همین پر و تخیه شدن خازن علامت  $I_c$  را تغییر می دهد.

فرض کنید ولتاژ دو سر خازن، نیز مطلوب باشد می توان آن را با انتگرالیگری از  $I_c$  در

حوزه زمان به دست آورد. بنابراین

$$v_c = 2 \times 10^5 \int_0^t (6 - 30000x) e^{-5000x} dx \quad (16-63)$$

اگرچه انتگرالیگری از معادله (16-63) مشکل نیست اما می توان از محاسبه آن اجتناب کرد

به این ترتیب که نخست رابطه، را در حوزه  $s$  به دست آوریم و آنگاه از آن تبدیل عکس

بگیریم. بنابراین داریم

$$V_c = \frac{1}{sC} I_c = \frac{(2 \times 10^5)}{s} \cdot \frac{6s}{(s + 5000)^2}$$

$$= \frac{12 \times 10^5}{(s + 5000)^2} \quad (16-64)$$

که از آن داریم

$$v_c = 12 \times 10^5 te^{-5000t} u(t)$$

اثبات سازگاری معادله (16-65) با معادله (16-16) و نیز اثبات اینکه معادله (16-65)

ملاحظات را که بنا به رابطه  $I_c$  در مورد مدار داشته ایم تأیید می کند، به خواننده واگذار می

شود (مسئله 16-22).

در ششمین و آخرین مثال چگونگی تحلیل پاسخ گذاری مداری شامل القا کتایی متقابل با

استفاده از تبدیل لاپلاس تشریح می شود این مدار در شکل 16-20 آمده است کلید «وصل

قبل از قطع» مدتها در وضعیت a بوده است. در  $t=0$  کلید ناگهان به وضعیت b می رود. می خواهیم رابطه  $i_2$  در حوزه زمان را به دست آوریم.

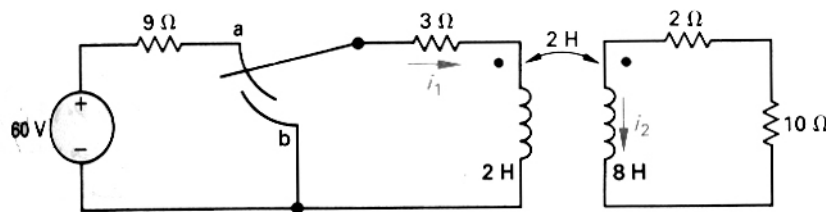
نخست مدار شکل ۱۶-۲۰ را برای حالتی که کلید در وضعیت b است و به جای پیچک مغناطیسی تزویج شده مدار هم ارز T قرار گرفته، دوباره رسم می کنیم. این مدار در شکل ۱۶-۲۱ آمده است.

حال مدار شکل ۱۶-۲۱ را به حوزه s تبدیل می کنیم. برای چنین منظوری می دانیم که

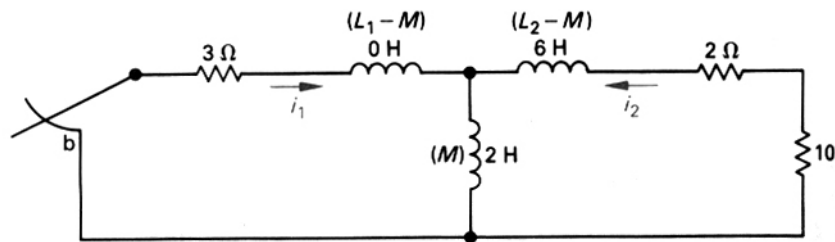
$$i_1(0) = \frac{60}{12} = 5A \quad (16-66)$$

$$i_2(0) = 0 \quad (16-67)$$

از آنجا که در نظر داریم از تحلیل خانه های در حوزه s استفاده کنیم. برای القا گریا جریان اولیه، مدار هم ارز متوالی را به کار می بریم. مدار حوزه بسامدی در شکل ۱۶-۲۲ آمده است که در آن تنها یک منبع ولتاژ مستقل ظاهر می شود. این منبع در ساق عمودی T ظاهر می شود و نشان می دهد که جریان اولیه در القا گر  $2-H$  برابر یا  $5A$  است.



شکل ۱۶-۲۰- مداری که پیچکهای مغناطیسی جفت شده دارد.



شکل ۱۶-۲۱- مدار شکل ۱۶-۲۰ که به جای پیچکهای مغناطیسی تزویج شده آن مدار هم ارز T آمده است

در شاخه ای که جریان  $i_1$  از آن می گذرد منبع ولتاژ بوجود ندارد. زیرا  $L_1 - M = 0$

دو معادله خانه توصیف کننده مدار شکل ۱۶-۲۲ در حوزه بسامد عبارت اند از

$$(3 + 2s)I_1 + 2sI_2 = 10 \quad (16-68)$$

و

$$2sI_1 + (12 + 8s)I_2 = 10 \quad (16-69)$$

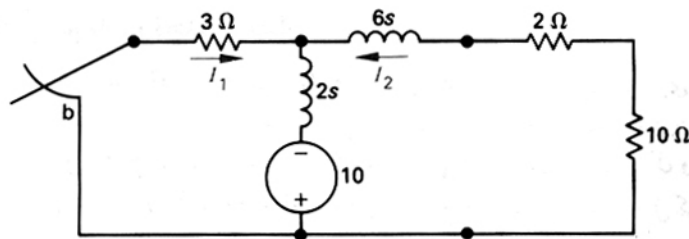
از حل آنها نسبت به  $I_2$  داریم

$$I_2 = \frac{25}{(s+1)(s+3)} \quad (16-70)$$

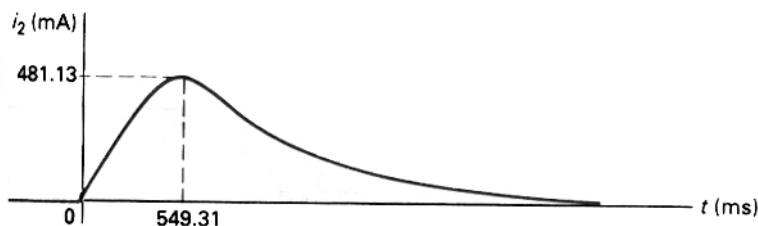
از تجزیه معادله (۱۶-۷۰) به کسرهای ساده چنین به دست می آید.

$$I_2 = \frac{125}{s+1} - \frac{125}{s+3} \quad (16-71)$$

از معادله (۱۶-۷۱) مستقیما داریم.



شکل ۱۶-۲۲ مدار هم ارز مدار شکل ۱۶-۲۱ در حوزه S



شکل ۱۶-۲۳- منحنی I مدار شکل ۱۶-۲۰ بر حسب t

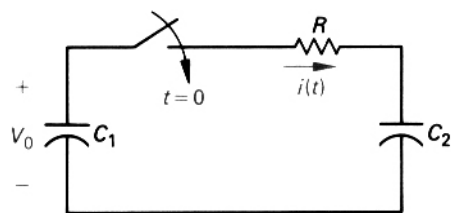
$$i_2 = (125e^{-t} - 125e^{-3t})u(t)A \quad (۱۶-۷۲)$$

از بررسی معادله (۱۶-۷۲) آشکار می شود که ۳۱ و ۵۴۹ MS پس از اینکه کلید به وضعیت B می رود جریان I به مقدار اوج خود، ۱۳mA و ۴۸ می رسد. منحنی  $I_2$  بر حسب t در شکل ۱۶-۲۳ آمده است. این پاسخ با رفتار فیزیکی معلوم پیچکهای دارای تزویج مغناطیسی سازگار است. جریان در القاگر  $L_2$  فقط وقتی می تواند موجود باشد که جریانی متغیر با زمان از القاگر  $L_1$  بگذرد. با کاهش  $I_1$  از مقدار اولیه خود یعنی از ۵A،  $I_2$  افزایش می یابد و پس از آنکه  $I_1$  به صفر نزدیک می شود  $I_2$  نیز به صفر نزدیک خواهد شد. (مسئله ۱۶-۲۳) را ببینید.

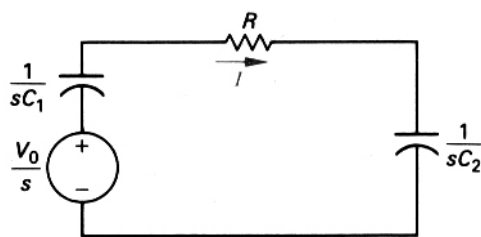
#### ۱۶-۵ تابع ضربه در تحلیل مدار

توابع ضربه به دلیل عمل قطع و وصل کلید و یا تحریک مدار با منبعی ضربه ای در مدارها ظاهر می شوند. نخست به چگونگی تشکیل تابع ضربه در عمل قطع و وصل کلید می پردازیم. در مدار شکل ۱۶-۲۴- در لحظه ای که کلید بسته می شود خازن  $C_1$  معادل ولتاژ اولیه  $V_0$  باردار می شود بار اولیه  $C_2$  صفر است می خواهیم هرگاه R به صفر میل کند رابطه  $I(t)$  را بیابیم. مدار هم ارز حوزه بسامدی در شکل ۱۶-۲۵ آمده است.

با توجه به شکل ۱۶-۲۵ مستقیماً می توان نوشت.



شکل ۱۶-۲۴- مدارای که به کمک آن طرز تکمیل تابع ضربه بررسی می شود.



شکل ۱۶-۲۵- مدار هم ارز مدار شکل ۱۶-۲۴ در حوزه s

$$I = \frac{V_0 / s}{R + (1/sC_1) + (1/sC_2)}$$

$$= \frac{V_0 / R}{s + (1/RC_2)} \quad (۱۶-۷۳)$$

که در آن  $C_e$  ظرفیت هم ارز ظرفیتهای  $C_1$  و  $C_2$  یعنی  $C_e = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$  است.

تبدیل عکس معادله (۱۶-۷۳) با یک نگاه چنین می شود.

$$i = \left( \frac{V_0}{R} e^{-4/RC_e} \right) u(t) \quad (۱۶-۷۳)$$

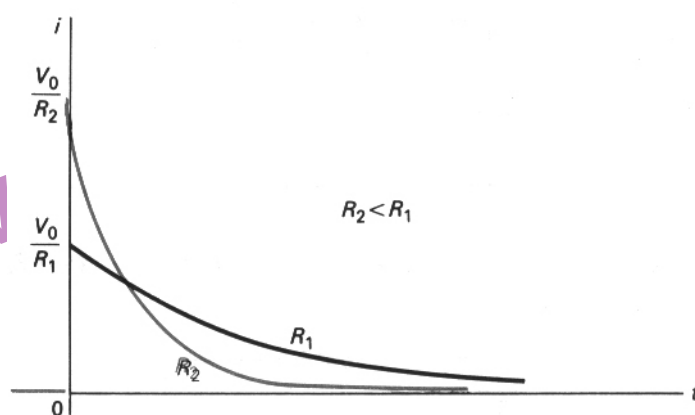
بنابه این معادله کاهش R جریان اولیه  $(V_0 / R)$  را افزایش و ثابت زمانی  $(RC_e)$  را کاهش

می دهد. بنابراین هرچه R کوچکتر شود مقدار اولیه جریان بزرگتر و افت آن سریعتر

خواهد بود. مشخصه های I در شکل ۱۶-۲۶ آمده است.



در اینجا پی به این نکته می بریم که جریان  $I$  با میل کردن  $R$  به سوی صفر به تابع ضربه نزدیک می شود زیرا مقدار اولیه  $I$  به بینهایت و عمر آن به صفر میل می کند. حال کافی است ثابت کنیم که مساحت زیر منحنی تابع جریان مستقیم از  $R$  است. از نظر فیزیکی کل مساحت زیر منحنی  $I$  بر حسب  $t$  همان کل باری است که پس از بسته شدن کلید به خازن  $C_e$  منتقل می شود، بنابراین داریم.



شکل ۱۶-۲۶- منحنی  $I(t)$  به ازای دو مقدار مختلف  $R$

$$= q = \int_0^{\infty} \frac{V_0}{R} e^{-t/RC_e} dt = V_0 C_e \quad (75-16)$$

این معادله حکایت از آن دارد که کل بار منتقل شده به  $C_e$  مستقل از  $R$  و برابر  $V_0 C_e$  کولن است. بنابراین با نزدیک شدن  $R$  به صفر به ضربه ای با شدت  $V_0 C_e$  میل می کند یعنی داریم.

$$i \rightarrow V_0 C_e \delta(t) \quad (76-16)$$

تغییر فیزیکی معادله (۷۶-۱۶) این است که هرگاه داشته باشیم  $R=0$ ، ناگهان بار معینی به  $C_e$  منتقل می شود. با توجه به شکل ۱۶-۲۴ می توان دریافت که چرا وقتی  $R=0$ ، انتقال بار

ناگهانی خواهد بود. وقتی R برابر صفر است و کلید را می بندیم ولتاژی به خازنی اعمال می شود که ولتاژ اولیه آن صفر است. تنها در صورتی تغییری ناگهانی در ولتاژ خازن ایجاد می شود که انتقال بار ناگهانی باشد. وقتی کلید بسته می شود، ولتاژ  $C_2$  به  $V_0$  نمی برد بلکه

$$v_2 = \frac{C_1 V_0}{C_1 + C_2} \quad (77-16)$$

که مقدار نهایی آن است خواهد پرید. روش به دست آوردن معادله (77-16) در مسئله 16-27 به خواننده واگذار می شود.

توجه کنید که اگر در آغاز R را برابر صفر بگیریم به کمک تحلیل از طریق تبدیل لاپلاس می توان پاسخ جریان به ضربه را به دست آورد. داریم.

$$I = \frac{V_0/s}{(1/sC_1) + (1/sC_2)} = \frac{C_1 C_2 V_0}{C_1 + C_2} = C_e V_0 \quad (78-16)$$

برای نوشتن معادله (78-16) از ولتاژهای خازنهای در  $t=0^-$  استفاده کرده ایم. تبدیل عکس یک مقدار ثابت برابر است با حاصلضرب همان مقدار ثابت در تابع ضربه، بنابراین از معادله

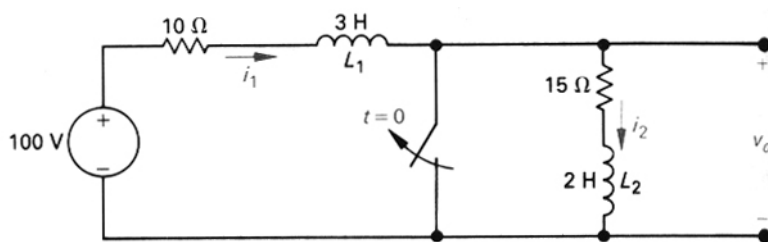
(78-16) داریم.

$$i = C_e V_0 \delta(t) \quad (79-16)$$

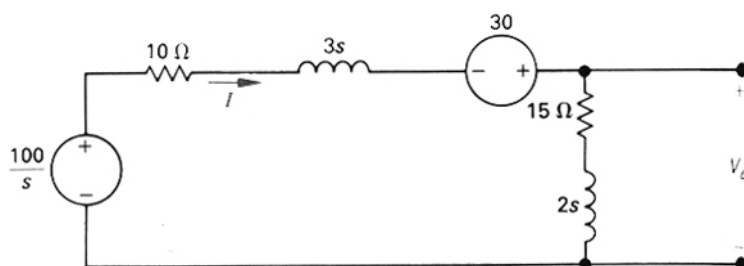
توانایی تبدیل لاپلاس در پیش بینی دقیق وجود تابع ضربه از جمله دلایل کاربرد گسترده تبدیل لاپلاس در تحلیل رفتار گذرای مدارهای خطی پارامتر-فشرده نامتغیر با زمان است.

به عنوان مثالی دیگر که در آن چگونگی پدید آمدن پاسخ به ضربه در اثر عمل قطع و وصل بررسی می شود مدار شکل ۱۶-۲۷ را در نظر بگیرید. در این مدار می خواهیم رابطه حوزة زمانی  $v_o$  را پس از باز شدن کلید بیابیم. توجه کنید که باز کردن کلید تغییری ناگهانی در جریان  $i_2$  پدید می آورد. که باعث می شود در پاسخ  $v_o$  تابع ضربه ظاهر شود.

مدار هم ارز حوزة بسامدی مدار شکل ۱۶-۲۷ وقتی کلید باز است در مدار شکل ۱۶-۲۸ آمده است. مدار شکل ۱۶-۲۸ با توجه به این امر به دست آمده است که در  $t=0^-$  جریان القا اگر  $3\text{-H}$  برابر  $10\text{ A}$  و جریان القا گر  $2\text{-H}$  برابر صفر است. شرایط اولیه را در  $t=0^-$  در نظر گرفتیم زیرا حد پایینی انتگرال تبدیل لاپلاس  $0^-$  است.



شکل ۱۶-۲۷- مداری که در آن ولتاژی ضربه پدید می آید.



شکل ۱۶-۲۸- مدار هم ارزی حوزة بسامدی مدار شکل ۱۶-۲۷.

رابطه  $v_o$  را می توان به کمک یک معادله ولتاژ گره به دست آورد. از جمع جریانهای خارج شونده از گره میان مقاومت  $15\text{-}\Omega$  و منبع  $30\text{-V}$  داریم.

$$\frac{V_o}{2s+15} + \frac{V_o - [(100/s) + 30]}{3s+10} = 0 \quad (۸۰-۶)$$

از حل معادله فوق نسبت به  $V_o$  چنین به دست می آید.

$$V_o = \frac{40(s+7,5)}{s(s+5)} + \frac{12(s+7,5)}{(s+5)} \quad (۸۱-۶)$$

چون جمله دوم طرف راست معادله (۸۱-۶) تابعی گویا و ناسره است در  $v_o$  تابع ضربه

وارد خواهد شد. از تقسیم صورت بر منخرج تابع ناسره به یک عدد ثابت و یک تابع گویای

سره دست می یابیم.

$$\frac{12(s+7,5)}{s+5} = 12 + \frac{30}{s+5} \quad (۸۲-۶)$$

با توجه به معادله (۸۲-۶) و سپس تجزیه نخستین جمله راست معادله (۸۱-۶) به

کسرهای ساده داریم

$$V_o = \frac{60}{s} - \frac{20}{s+5} + 12 + \frac{30}{s+5} \quad (۸۳-۱۶)$$

$$= 12 + \frac{60}{s} + \frac{10}{s+5}$$

که از آن داریم

$$v_o = 12\delta(t) + (60 + 10e^{-5t})u(t)V \quad (۸۴-۱۶)$$

آیا این جواب با عملکرد مدار سازگار است؟ پیش از پاسخ دادن به این پرسش رابطه جریان

را در  $t > 0^-$  به دست می آوریم. پس از باز شدن کلید، جریان  $L_1$  برابر جریان  $L_2$  است.

اگر در خانه مدار شکل ۱۶-۲۸ جهت منای جریان را در جهت عقربه های ساعت بگیریم

رابطه I در حوزه s چنین است :

(۱۶-۸۵)

$$I = \frac{(100/s) + 30}{5s + 25} = \frac{20}{s(s+5)} + \frac{6}{s+5}$$

$$= \frac{4}{s} - \frac{4}{s+5} + \frac{6}{s+5}$$

$$= \frac{4}{s} + \frac{2}{s+5}$$

تبدیل عکس معادله (۱۶-۸۵) چنین است

$$i = (4 + 2e^{-5t})u(t)A \quad (۱۶-۸۶)$$

به این نکات توجه کنید: (۱) پیش از باز شدن کلید جریان  $L_1$  برابر  $10A$  و جریان  $L_2$  برابر

$0A$  است، و (۲) از معادله (۱۶-۸۶) می دانیم  $t = 0^+$  جریان در  $L_1$ ،  $L_2$  برابر  $6A$  است.

بنابراین جریان در  $L_1$ ،  $L_2$  به ترتیب از  $10A$  به  $6A$  و از  $0A$  به  $6A$  تغییر ناگهانی دارد. پس

از آن جریان از مقدار اولیه  $6A$  به صورت نمایی به مقدار نهایی  $4A$  کاهش می یابد. با

توجه به مدار نیز مقدار نهایی جریان برابر  $100/25$  یا  $4A$  خواهد بود. منحنیهای  $i_1$  و  $i_2$  در

شکل ۱۶-۲۹ آمده است.

چگونه می توان هماهنگی این جهشهای ناگهانی جریان القاگر را با رفتار واقعی مدار

بررسی کرد؟ نخست می دانیم که باز شدن کلید باعث متوالی شدن دو القاگر می شود. هر

ولتاژ ضربه دو سر القاگر  $3-H$  باید با ولتاژ ضربه دو سر القاگر  $2-H$  دقیقاً به حالت تعادل

برسد زیرا جمع ولتاژهای ضربه حول مسیر بسته صفر است. بنا به قانون فاراد ولتاژ القایی متناسب با تغییر حلقه زنی شار است.  $(v = d\lambda / dt)$ . بنابراین در این مدار متوالی تغییر حلقه زنی شار باید برابر صفر باشد. به دیگر سخن کل حلقه زنی شار بلافاصله قبل و بعد

از کلید زنی یکسان است. در این مدار، حلقه زنی شار پیش از کلیدزنی برابر است با

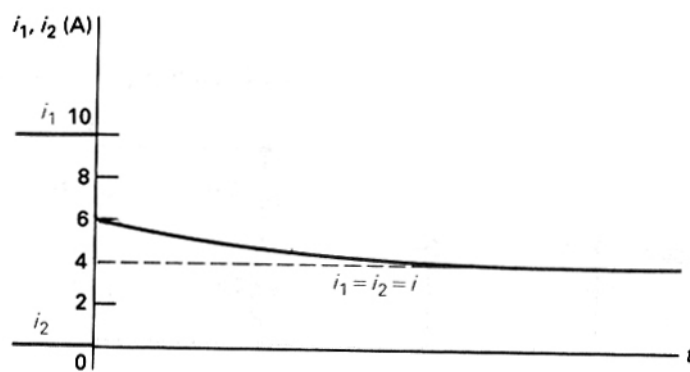
$$\lambda = L_1 i_1 + 2 i_2 = 3(10) + 2(0) = 30 \quad \text{و بر دور} \quad (۸۷-۱۶)$$

پس از کلیدزنی داریم

$$\lambda = (L_1 + L_2) i(o^+) = 5i(o^+) \quad (۸۸-۱۶)$$

با توجه به معادله های (۸۷-۱۶) و (۸۸-۱۶) داریم

$$i(o^+) = 30/5 = 6A \quad (۸۹-۱۶)$$



شکل ۱۶-۲۹: منحنی جریانهای القاگرهای مدار شکل ۱۶-۲۷ برحسب t

بنابراین جواب i [معادله (۸۶-۱۶)] با اصل بقای حلقه زنی شار سازگار است.

حال به بررسی صحت معادله (۸۴-۱۶) می پردازیم، نخست جمله  $12\delta(t)$  را بررسی

می کنیم. جهش ناگهانی  $i_2$  از 0 به 6 A در  $t = 0$ ، تابعی ضربه با شدت  $\delta(t)$  در مشتق  $i_2$

پدید می آورد. این ضربه در مشتق  $i_2$  باعث پدید آمدن ولتاژ  $\delta(t)$  ۱۲ در القاگر H-۲ می

شود. در  $t > 0^+$  برابر  $di_2/dt$  برابر  $-10e^{-5t} A/s$  است؛ بنابراین ولتاژ  $v_o$  چنین است

$$v_o = 15(4 + 2e^{-5t}) + 2(-10e^{-5t}) \quad (90-16)$$

$$= (60 + 10e^{-5t})u(t) V$$

معادله (۹۰-۱۶) همان دو جمله آخر سمت چپ معادله (۸۴-۱۶) است، بنابراین معادله

(۸۴-۱۶) با رفتار معلوم مدار سازگار است.

همچنین می توان افت ناگهانی جریان  $i_1$  را از  $10A$  به  $6A$  بررسی کرد. این افت باعث

پدید آمدن ضربه  $-4\delta(t)$  در مشتق  $i_1$  می شود. بنابراین ولتاژ دو سر  $L_1$  شامل ضربه

$12\delta(t)$  در مبدأ است. این ضربه دقیقاً با ضربه  $L_2$  خنثی می شود زیرا جمع ولتاژهای

ضربه حول مسیر بسته صفر است.

مثال سوم در مورد چگونگی تولید پاسخ به ضربه در اثر عمل قطع و وصل کلید به کمک

مدار شکل ۱۶-۳۰ نشان داده می شود. کلید پیش از باز شدن مدتها بسته بوده است.

همانگونه که در شکل ۱۶-۳۰ آمده است جریان اولیه در القاگرهای H-۲ و H-۱ به ترتیب

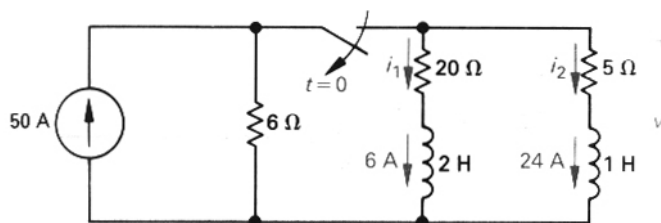
$6A$  و  $24A$  است. برای بدست آوردن  $v$ ،  $i_1$  و  $i_2$  نخست باید مدار هم ارز حوزه بسامدی

را به دست آورد که نتیجه آن در شکل ۱۶-۳۱ آمده است.

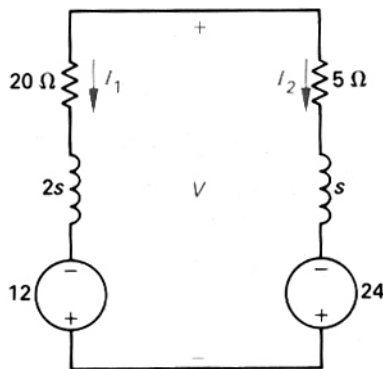
برای بدست آوردن  $v$  یک معادله ولتاژ گره می نویسیم:

$$\frac{V + 12}{2s + 20} + \frac{V + 24}{s + 5} = 0 \quad (91-16)$$

از حل معادله (91-16) بر حسب  $V$  داریم.



شکل ۱۶-۳۰: مداری که پاسخ ضربه ای دارد



شکل ۱۶-۳۱: مدار هم ارز مدار شکل ۱۶-۳۰ در حوزه  $s$

$$V = -\frac{20(s+9)}{s + (25/3)} \quad (92-16)$$

از آنجا که معادله (92-16) تابعی گویا و ناسره است صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم

$$V = -20 - \frac{40/3}{s + 25/3} \quad (93-16)$$

تبدیل عکس معادله (93-16) چنین است

$$v(t) = -20\delta(t) - \frac{40}{3}e^{-(25/3)t}u(t) \quad (94-16)$$

جریانهای  $I_1$  و  $I_2$  چنین اند.



$$I_1 = \frac{V+12}{2s+20} = \frac{-10(s+9)}{(s+10)[s+(25/3)]} + \frac{6}{s+10} = \frac{4}{s+(25/3)} \quad (95-16)$$

و

$$I_2 = \frac{V+24}{s+5} = \frac{-20(s+9)}{(s+5)[s+(25/3)]} + \frac{24}{s+5} = -\frac{4}{s+(25/3)} \quad (96-16)$$

روابط  $i_1$ ،  $i_2$  چنین به دست می آیند.

$$i_1 = -4e^{-(25/3)t} u(t)A \quad (97-16)$$

$$i_2 = 4e^{-(25/3)t} u(t)A \quad (98-16)$$

حال باید هماهنگی نتایج را با عملکرد واقعی مدار بررسی کنیم. اولاً می دانیم که در  $t > 0$

داریم  $t_1 = -t_2$ . این نتیجه با قانون جریان کیرشهف سازگار است. ثانیاً می دانیم که وقتی

کلید را می بندیم جریان  $i_1$  از  $6A$  به  $-4A$  و جریان  $i_2$  از  $24A$  به  $4A$  می جهد. حال

میتوان ثابت کرد که این تغییرات ناگهانی صحیح هستند. از آنجا که دو القاگر موازی اند،

تغییر حلقه زنی شار آنها باید در شاخه ها یکی باشد؛ یعنی داریم

$$\Delta i_1 L_1 = \Delta i_2 L_2 \quad (99-16)$$

بنا به قانون جریان کیرشهف داریم

$$i_1(0^-) + \Delta i_1 + i_2(0^-) + \Delta i_2 = 0 \quad (100-16)$$

با قراردادن مقادیر عددی  $L_2 = 1H$ ،  $L_1 = 2H$ ،  $i_1(0) = 6A$  و  $i_2(0^-) = 24A$  در معادله

های (99-16) و (100-16)،  $\Delta i_1$  و  $\Delta i_2$  چنین به دست می آیند.

$$\Delta i_1 = -10A \quad (101-16)$$

$$\Delta i_2 = -20A \quad (16-102)$$

که به ترتیب با جهشهای اولیه  $i_2, i_1$  سازگارند.

بالاخره می دانیم که افقت ناگهانی جریان  $i_1$  از  $6A$  به  $-4A$  باعث بوجود آمدن ضربه

$\delta(t)$  در مشتق جریان  $i_1$  می شود. همچنین تغییر ناگهانی جریان  $i_2$  از  $24A$  به  $4A$

ضربه  $\delta(t)$  را در مشتق  $i_2$  بوجود می آورد. بنابراین در لحظه زدن کلید داریم:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} = -20\delta(t) \quad (16-103)$$

نتیجه ای که در معادله (16-103) آمده است با جواب  $v$  یعنی با معادله (16-94) سازگار

است.

دومین نوع مدارهای شامل تابع ضربه، مدارهایی هستند که منبع تحریک آنها تابع ضربه

است. هرگاه منبع مداری تابعی ضربه باشد، ناگهان مقدار معینی انرژی به سیستم اعمال

میشود. مشابه مکانیکی این سیستم زنگی است که با چکش به آن ضربه می زنیم. وقتی

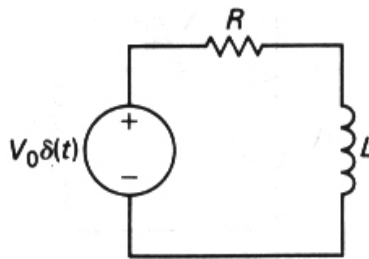
انرژی به زنگ منتقل می شود پاسخ طبیعی این زنگ نوای صدای منتشر شده و عمر آن را

تعیین می کند.

مدار شکل 16-32 را در نظر بگیرید. در این مدار منبع ولتاژی ضربه با شدت  $V_0$  ولت ثانیه

به ترکیب متوالی یک خازن و یک القاگر اعمال می شود. در لحظه اعمال منبع ولتاژ انرژی

اولیه در القاگر و در نتیجه جریان اولیه صفر است.



شکل ۳۲.۱۶ یک مدار RL که با منبع ولتاژ ضربه تحریک می شود.

یعنی در دو سر R افت ولتاژی نخواهیم داشت و منبع ولتاژ ضربه مستقیماً به دو سر L اعمال می شود. ولتاژ ضربه در دو سر القاگرها جریان لحظه ای پدید می آورد. مقدار جریان را می توان از معادله انتگرالی زیر به دست آورد.

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t V_0 \delta(x) dx \quad (104-16)$$

به کمک خاصیت غربالی توابع ضربه از معادله (۱۰۴-۱۶) چنین به دست می آید.

$$i(0^+) = \frac{V_0}{L} A \quad (105-16)$$

بنابراین در لحظه ای بینهایت کوچک، منبع ولتاژ ضربه انرژی زیر را در القاگر ذخیره می سازد.

$$w = \frac{1}{2} L \left( \frac{V_0}{L} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{L} J \quad (106-16)$$

حال جریان  $V_0/L$  مطابق رابطه پاسخ طبیعی زیر به صفر می رسد.

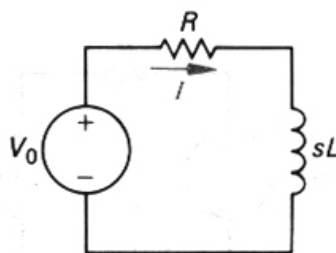
$$i = \frac{V_0}{L} e^{-t/\tau} u(t) \quad (107-16)$$

که در آن  $\tau = L/R$ . هر گاه مداری تنها با منبعی ضربه تحریک شود، پاسخ همیشه پاسخ طبیعی مدار است.

معادله (۱۰۷-۱۶) را می توان مستقیماً به کمک روش تبدیل لاپلاس به دست آورد. هم ارز حوزه بسامدی مدار شکل ۱۶-۳۲ در شکل ۱۶-۳۳ آمده است با توجه به شکل ۱۶-۳۳

داریم:

$$I = \frac{V_0}{R + sL} = \frac{V_0/L}{s + R/L} \quad (108-16)$$



شکل ۱۶-۳۳: مدار هم ارز مدار شکل ۱۶-۳۲۲ در حوزه s

$$i = \frac{V_0}{L} e^{-(R/L)t} = \frac{V_0}{L} e^{-t/\tau} u(t)$$

که از آن داریم

مشاهده می شود که روش تبدیل لاپلاس در  $t \geq 0^+$  جواب صحیحی از  $i$  به دست می دهد. سرانجام حالتی را بررسی می کنیم که ضربه های داخلی و ضربه های خارجی همزمان به مدار اعمال می شوند. اگر در ساختن مدار هم ارز حوزه بسامدی جریانهای القاگرها و ولتاژهای خازنها در  $t = 0^-$  منظور شوند و ضربه های اعمالی به صورت تبدیل شده ظاهر شده باشند. روش تبدیل لاپلاس خود به خود جواب صحیح در  $t \geq 0^+$  را به دست می دهد.

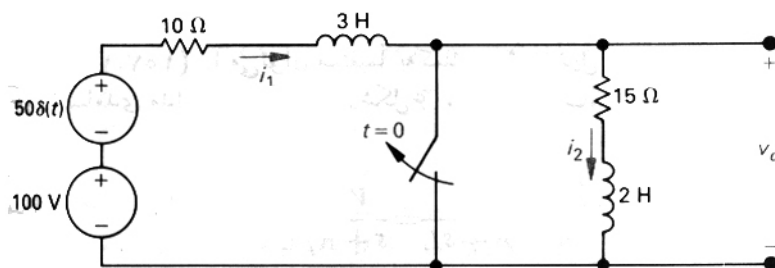
برای مثال مدار شکل ۱۶-۲۷ را در نظر بگیرید که در آن منبع ولتاژ ضربه  $50\delta(t)$  برابر  $50$  است. به کمک این مقادیر مدار هم ارز حوزه بسامدی شکل ۱۶-۳۵ به دست می آید.

رابطه I چنین است :

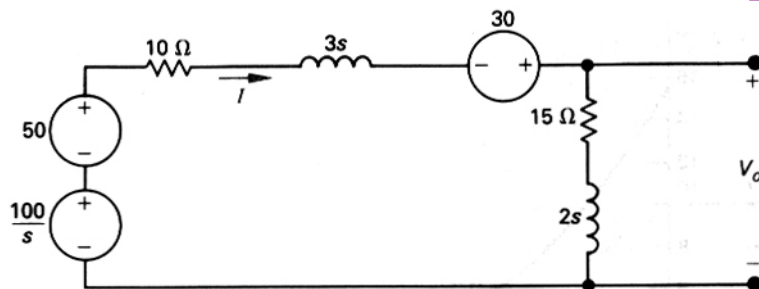
$$I = \frac{50 + (100/s) + 30}{25 + 5s} = \frac{16}{s+5} + \frac{20}{s(s+5)} \quad (110-16)$$

$$= \frac{16}{s+5} + \frac{4}{s} - \frac{4}{s+5}$$

$$= \frac{12}{s+5} + \frac{4}{s}$$



شکل ۱۶-۳۴: مدار شکل ۱۶-۲۷ که در آن منبع ولتاژ ضربه با منبع ۱۰۰-V متوالی شده است.



شکل ۱۶-۳۵: مدار هم ارز شکل ۱۶-۳۴ در حوزه s

که از آن داریم :

$$i(t) = (12e^{-5t} + 4)u(t) \text{ A} \quad (111-16)$$

رابطه  $V_o$  چنین است :

$$V_o = (15 + 2s)I = \frac{32(s+7,5)}{s+5} + \frac{40(s+7,5)}{s(s+5)} \quad (112-16)$$

$$= 32\left(1 + \frac{2.5}{s+5}\right) + \frac{60}{s} - \frac{20}{s+5}$$

$$= 32 + \frac{60}{s+5} + \frac{60}{s}$$

که از آن داریم

$$v_o = 32\delta(t) + 60e^{-5t} + 60u(t) \text{ V} \quad (113-116)$$

اکنون به آزمون نتایج به دست آمده و هماهنگی آنها با عملکرد مدار می پردازیم.

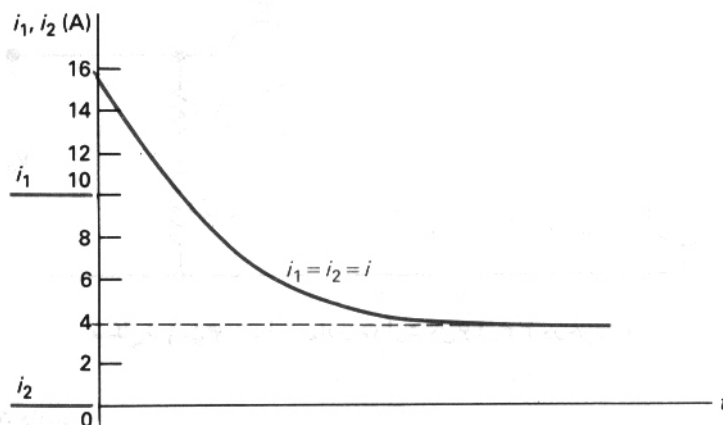
بنا به معادله (۱۱۱-۱۱۶) جریان  $L_1$  ,  $L_2$  در  $t=0^+$  برابر  $16 \text{ A}$  است. مانند حالت قبل باز

شدن کلید باعث می شود جریان  $i_1$  ناگهان از  $10 \text{ A}$  به  $6 \text{ A}$  کاهش و جریان  $I_2$  از  $0$  به  $6 \text{ A}$

افزایش یابد. از طرفی منبع ولتاژ ضربه جریانی برابر  $10 \text{ A}$  در  $L_1$  ,  $L_2$  به وجود می آورد

یعنی

$$i = \frac{1}{(3+2)} \int_0^t 50\delta(x) dx = 10 \text{ A} \quad (114-116)$$



شکل ۱۱۶-۳۶: منحنی جریانهای القاگرهای مدار شکل ۱۱۶-۳۴ بر حسب  $t$

بنابراین ناگهان جریان  $i_1$  از  $10\text{ A}$  به  $16\text{ A}$  و در جریان  $i_2$  از  $0$  به  $16\text{ A}$  افزایش خواهد داشت. مقدار نهایی  $I$  برابر  $4\text{ A}$  است. منحنی جریانهای  $i_1$ ،  $i_2$  و  $I$  در شکل ۱۶-۳۶ همچنین شایان توجه است که تغییرات ناگهانی جریانهای  $i_1$ ،  $i_2$  را می توان بدون استفاده از اصل برهمکنشی (جمع آثار) به دست آورد. در این مدار مجموع ولتاژهای ضربه دو سر  $L_1$  (۳H) و  $L_2$  و (۲H) برابر  $50\delta(t)$  است. بنابراین تغییر حلقه زنی شار باید برابر  $50$  باشد. یعنی داریم:

$$\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 = 50 \quad (115-16)$$

از آنجا که داریم  $\lambda = Li$ ، معادله (۱۱۵-۱۶) را می توان چنین نوشت

$$3\Delta i_1 + 2\Delta i_2 = 50 \quad (116-16)$$

اما از آنجا که پس از کلیدزنی  $i_1$ ،  $i_2$  باید برابر باشند داریم

$$i_1(0^-) + \Delta i_1 = i_2(0^-) + \Delta i_2 \quad (117-16)$$

بنابراین داریم

$$10 + \Delta i_1 = 0 + \Delta i_2 \quad (118-16)$$

از حل معادله های (۱۱۶-۱۶) و (۱۱۸-۱۶) نسبت به  $\Delta i_1$  و  $\Delta i_2$  داریم

$$\Delta i_1 = 6\text{ A} \quad (119-16)$$

و

$$\Delta i_2 = 16\text{ A} \quad (120-16)$$

که با مقادیر به دست آمده قبلی سازگارند.

از معادله ۱۶-۳۶ نیز می توان دید که مشتقهای جریانهای  $i_1$  ,  $i_2$  شامل ضربه در  $t=0$  هستند.

مشتق  $i_1$  ضربه  $\delta(t)$  و مشتق  $i_2$  ضربه  $\delta(t)$  دارد، مشتقهای  $i_1$  ,  $i_2$  به ترتیب در

شکلهای ۱۶-۳۷ (الف) و (ب) آمده اند.

اکنون به معادله (۱۶-۱۱۳) باز می گردیم. مولفه ضربه  $\delta(t)$  ۳۲ با این واقعیت که  $di_2/dt$

ضربه ای برابر  $\delta(t)$  ۱۶ در مبدأ دارد سازگار است. عبارت  $60 + 60 e^{-5t}$  نیز با این واقعیت

سازگار است که  $t > 0^+$  داریم

$$v_o = 15i + 2 \frac{di}{dt}$$

با توجه به اینکه مؤلفه ضربه  $di_1/dt$  ولتاژ ضربه  $\delta(t)$  ۶ (۳) یا  $\delta(t)$  ۱۸ را دو سر  $L_1$  ایجاد

می کند می توان آنرا آزمود. جمع این ولتاژ و ولتاژ  $\delta(t)$  ۳۲ دو سر  $L_2$  برابر  $\delta(t)$  ۵۰

است. بنابراین جمع جبری ولتاژهای ضربه حول حلقه برابر صفر است.

بحث درباره توابع ضربه در تحلیل مدار را می توان این چنین خلاصه کرد. به کمک تبدیل

لاپلاس می توان جریانها و ولتاژهای ضربه ناشی از قطع و وصل کلید را دقیقاً به دست

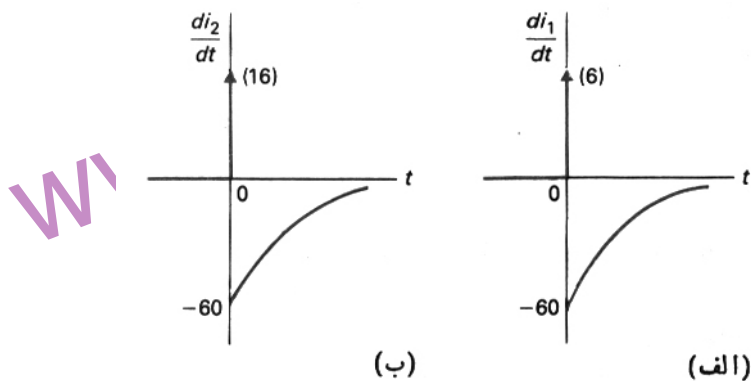
آورد مشروط بر اینکه در مدارهای هم ارز حوزه بسامدی شرایط اولیه در  $t = 0^-$  یعنی

شرایطی که پیش از کلیدزنی در مدار برقرار است منظور شود. همچنین به کمک تبدیل

لاپلاس می توان پاسخ تحریک ضربه را به دست آورد مشروط بر اینکه در مدارهای هم ارز

حوزه بسامدی به جای منابع تبدیل شده آنها را قرار دهیم.





شکل ۱۶-۳۷: منحنی مشتقهای  $i_2$  ,  $i_1$

۱۶-۶ خلاصه

هدف ما در این فصل این بود که عمدتاً به کمک مثال نشان دهیم که چگونه می توان با

استفاده از تبدیل لاپلاس پاسخ گذاری مدارهای خطی پارامتر - فشرده را به دست آورد.

چنانچه مدار مورد تحلیل را مستقیماً به حوزه s تبدیل کنیم روش تبدیل لاپلاس بسیار ساده

خواهد شد.

مدارهای هم ارز حوزه بسامدی شامل منابع مستقل ولتاژ و جریان است که برای به حساب

آوردن ولتاژ اولیه خازن و جریان اولیه القاگر منظور می شوند. قوانین کیرشهف برای

جریانها و ولتاژهای حوزه s به قوت خود باقی است. رابطه ولتاژ و جریان پایانه های

عناصر غیرفعال را همیشه می توان به کمک پاگیریابی (امپدانس) و منبع مستقلی که برای

شرایط اولیه منظور می شود به دست آورد. چنانچه شرایط اولیه صفر باشند این رابطه همان

قانون اهم در حوزه s یعنی  $V=Z(s) I$  خواهد بود. از آنجا که این قوانین بنیادی در حوزه s

قابل اجرا هستند، میتوان از روشهای تحلیل مدار که در مورد مدارهای مقاومتی با مدارهای حوزه فازبرداری به کار می رفتند استفاده کرد.

توابع ضربه موجود در مدار یا ناشی از عمل قطع و وصل کلید هستند یا از مشخصه های منبع تحریک مدارند. روش تبدیل لاپلاس دقیقاً ایجاد پاسخ ضربه را پیش بینی می کند و پاسخ به منبع تحریک ضربه را به درستی نشان می دهد. این توانایی تطبیق با توابع ضربه از مزایای ممتاز روش تبدیل لاپلاس است. برای بررسی صحت نتایج در مدارهایی که در آنها فرایند کلیدزنی روی می دهد و نیز بررسی سازگاری این نتایج با عملکرد مدار، استفاده از اصل بقای بار در مدارهای ظرفیتی و از اصل بقای حلقه زنی شار در مدارهای القایی سودمند است.

۱۷-۵- تابع تبدیل و انتگرال کانولوشن

انتگرال کانولوشن میان خروجی  $[y(t)]$  یک مدار خطی نامتغیر با زمان و ورودی  $[x(t)]$  و پاسخ ضربه مدار  $[h(t)]$  رابطه ای برقرار می سازد. معادله انتگرال را به دو صورت زیر

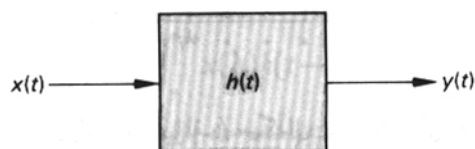
میتوان نوشت :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\lambda)x(\lambda)d\lambda \quad (17-29)$$

انتگرال کانولوشن به چند دلیل مورد توجه است. نخست آنکه در مواقعی که  $x(t)$  و  $h(t)$  تنها از طریق داده هایی تجربی معلوم باشند، میتوان مدار را کاملاً در حوزه زمان تحلیل کرد. چنانچه مبنای محاسبات داده های تجربی باشد، استفاده از روش لاپلاس سخت یا حتی غیرممکن است. دوم، به کمک انتگرال کانولوشن با مفاهیم حافظه و تابع توزین در تحلیل مدارها آشنا می شویم. نشان خواهیم داد که چگونه مفهوم حافظه به ما امکان می دهد که با نظر بر پاسخ ضربه (یا تابع توزین)  $h(t)$ ، تا حدی پیش کنیم که شکل موج خروجی چقدر از شکل موج ورودی تبعیت می کند. بالاخره، انتگرال کانولوشن روشی منظم فراهم می آورد که به کمک آن می توان تبدیل عکس حاصلضربهای چند تبدیل لاپلاس را به دست آورد.

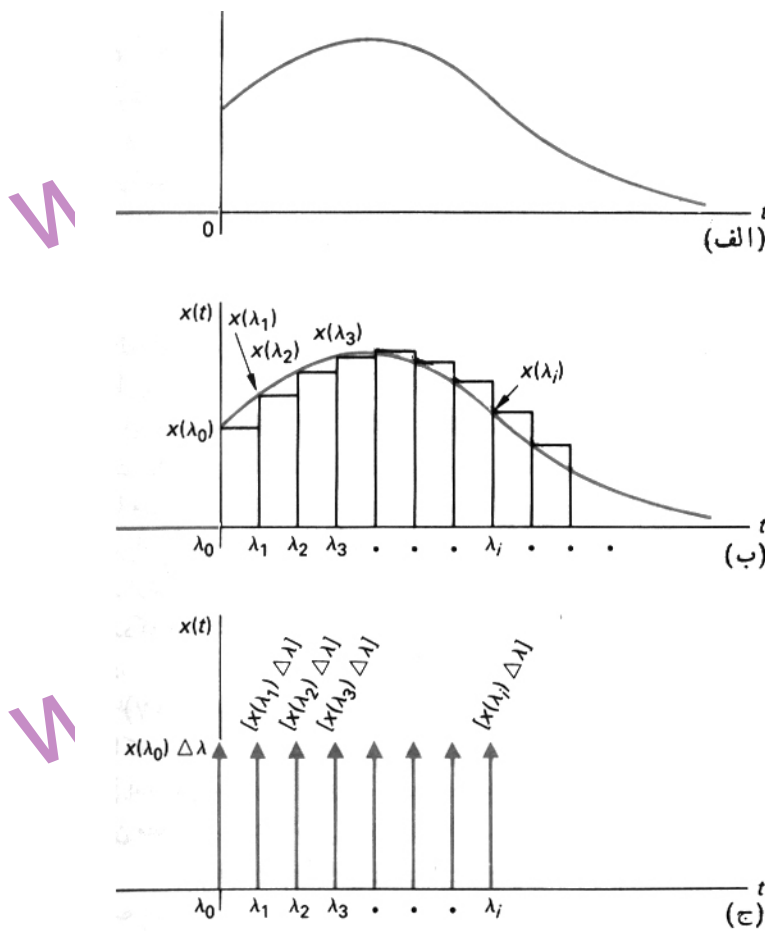
معادله (۱۷-۲۹) با این فرض به دست آمده است که مدار خطی و نامتغیر با زمان باشد. از آنجا که مدار خطی است، اصل برهمنهی در مورد آن معتبر است و از آنجا که مدار نامتغیر با زمان است، پاسخ به ورودی تأخیردار، تأخیری درست برابر تأخیر ورودی دارد. با توجه به

این مطالب نمودار شکل ۱۷-۱۱ را در نظر بگیرید. بلوکی که با  $h(t)$  مشخص شده است می تواند هر مدار خطی نامتغیر با زمانی باشد که پاسخ ضربه آن معلوم است  $x(t)$  سیگنال تحریک و  $y(t)$  سیگنال خروجی مطلوب است.



شکل ۱۷-۱۱: نمودار بلوکی یک مدار کلی

فرض کنید  $X(T)$ ، سیگنال تحریک کلی شکل ۱۷-۱۲ (الف) است. برای سادگی تحلیل فرض می کنیم  $x(t)$  در  $t < 0^-$  برابر صفر است. [پس از اینکه انتگرال کانولوشن را با این فرض که  $x(t)$  در  $t < 0^-$  صفر است به دست آوریم، میتوان این انتگرال را به توابع تحریکی که شامل تمام زمانها می شوند تعمیم داد]. توجه کنید که  $x(t)$  در مبدأ ناپیوسته است یعنی در فاصله  $0^-$  تا  $0^+$  دارای جهش است.



شکل ۱۷-۱۲: سیگنال تحریک  $x(t)$  (الف)، سیگنال تحریکی کلی (ب) تقریب زدن  $x(t)$  با رشته از پالسهای (ج) تقریب زدن  $x(t)$  با ضربه ها

حال مطابق شکل ۱۷-۱۲ (ب)  $x(t)$  را با رشته ای از پالسهای چهارگوش، که پهنای همگی آنها  $\Delta\lambda$  است، تقریب می زنیم. بنابراین داریم

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + \dots + x_i(t) + \dots \quad (۱۷-۳۰)$$

که در آن  $x_i(t)$  پالسی چهارگوش است که بین  $\lambda_i$  و  $\lambda_{i+1}$  برابر  $x(\lambda_i)$  و خارج آن صفر است. (یادآور می شود که پالس  $i$  ام را می توان برحسب توابع پله چنین نوشت

$$x_i(t) = x(\lambda_i) \{u(t - \lambda_i) - u[t - (\lambda_i + \Delta\lambda)]\}$$

مرحله بعد در تقریب زدن  $x(t)$  این است که  $\Delta\lambda$  را آنقدر کوچک کنیم که بتوان مؤلفه  $i$  ام را با تابع ضربه ای به شدت  $\Delta\lambda$   $x(\lambda_i)$  تقریب زد. ضربه ها در شکل ۱۷-۱۲ (ج) آمده اند. شدت هر ضربه در مقابل پیکان آن در درون گروه آمده است. نمایش  $x(t)$  به صورت ضربه چنین است:

$$x(t) = x(\lambda_0)\Delta\lambda\delta(t-\lambda_0) + x(\lambda_1)\Delta\lambda\delta(t-\lambda_1) + \dots + x(\lambda_i)\Delta\lambda\delta(t-\lambda_i) + \dots \quad (17-31)$$

اکنون که  $x(t)$  را با رشته ای از توابع ضربه نشان دادیم (که به ترتیب  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  واقع اند و فاصله زمانی آنها از یکدیگر برابرند)، تابع پاسخ  $y(t)$  از جمع رشته ای از پاسخهای ضربه با تأخیرهای یکسان تشکیل خواهد شد. شدت هر پاسخ ضربه به شدت ضربه تحریک متناظر با آن بستگی دارد. مثلاً فرض کنید پاسخ ضربه واحد مدار درون جعبه شکل ۱۷-۱۱ تابع نمایی کاهشی شکل ۱۷-۱۳ (الف) باشد. به این ترتیب جمع پاسخهای ضربه شکل ۱۷-۱۳ (ب) تقریبی از  $y(t)$  خواهد بود.

رابطه تحلیلی  $y(t)$  چنین است.

$$y(t) = x(\lambda_0)\Delta\lambda h(t-\lambda_0) + x(\lambda_1)\Delta\lambda h(t-\lambda_1) + x(\lambda_2)\Delta\lambda h(t-\lambda_2) + \dots + x(\lambda_i)\Delta\lambda h(t-\lambda_i) + \dots \quad (17-32)$$

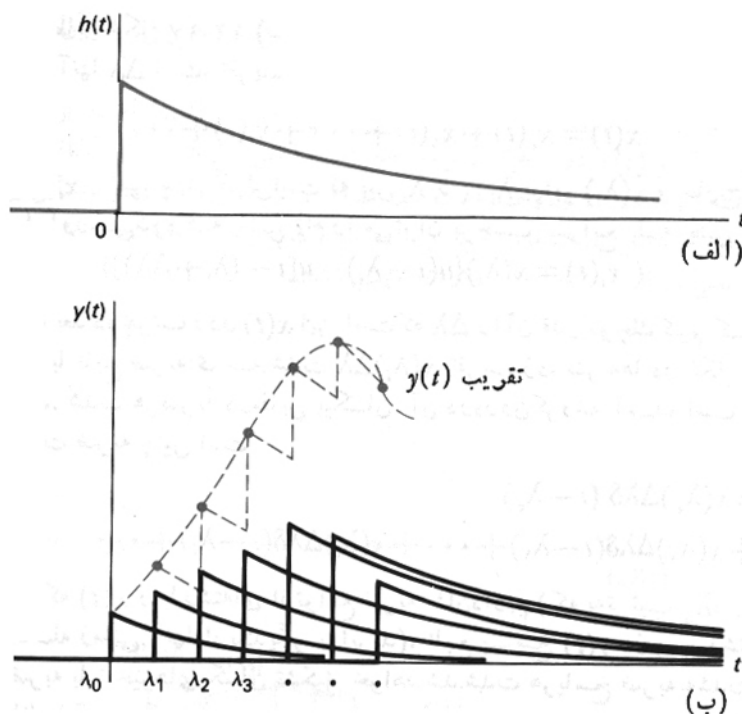
اگر  $\Delta\lambda$  به سوی صفر میل کند، حاصل جمع معادله (۱۷-۳۲) به سمت انتگرال پیوسته ای میل خواهد کرد. یعنی داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x(\lambda_i)h(t-\lambda_i)\Delta\lambda \rightarrow \int_0^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \quad (33-17)$$

بنابراین می توان نوشت

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \quad (34-17)$$

اگر  $x(t)$  در تمام زمانها وجود داشته باشد، حد پایینی معادله (۳۴-۱۷) را  $-\infty$  می گیریم و به طور کلی داریم



شکل ۱۳-۱۷: تقریب زدن  $y(t)$ : الف) پاسخ ضربه جعبه شکل ۱۱-۱۷ ب) جمع کردن پاسخهای ضربه

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \quad (35-17)$$

که شکل دوم انتگرال کانولوشن معادله (۲۹-۱۷) است. شکل اول انتگرال کانولوشن را میتوان با تغییر متغیر انتگرال گیری (۳۵-۱۷) به دست آورد. برای این منظور  $u$  را برابر

$t - \lambda$  می گیریم و به این ترتیب داریم  $du = -d\lambda$  و به ازای  $\lambda = \infty$  داریم  $u = -\infty$  و به

ازای  $\lambda = -\infty$  داریم  $u = +\infty$ . بنابراین معادله (۳۵-۱۷) را میتوان چنین نوشت

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)h(u)(-du)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)h(u)du \quad (۳۶-۱۷)$$

اما از آنجا که  $u$  تنها نمادی برای انتگرال گیری است معادله (۳۶-۱۷) همان شکل اول انتگرال کانولوشن یعنی معادله (۲۹-۱۷) است.

رابطه انتگرال میان  $y(t)$ ،  $h(t)$  و  $x(t)$ ، یعنی معادله (۲۹-۱۷) را اغلب با نماد خلاصه شده

زیر نشان می دهند.

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t) \quad (۳۷-۱۷)$$

که در آن ستاره به معنی ارتباط انتگرالی میان  $h(t)$  و  $x(t)$  است. از اینرو  $h(t) * x(t)$  را این

چنین می خوانند  $h(t)$  با  $x(t)$  رابطه کانولوشن دارد یعنی داریم

$$h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda$$

اما  $x(t) * h(t)$  را این چنین می خوانند  $x(t)$  با  $h(t)$  رابطه کانولوشن دارد و داریم

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda$$



انتگرالهای معادله (۱۷-۲۹) کلی ترین روابط برای کانولوشن دو تابع است. اما در کاربرد انتگرال کانولوشن می توان حد پایین را صفر و حد بالایی را  $t$  گرفت. بنابراین معادله (۱۷-۲۹) را میتوان چنین نوشت

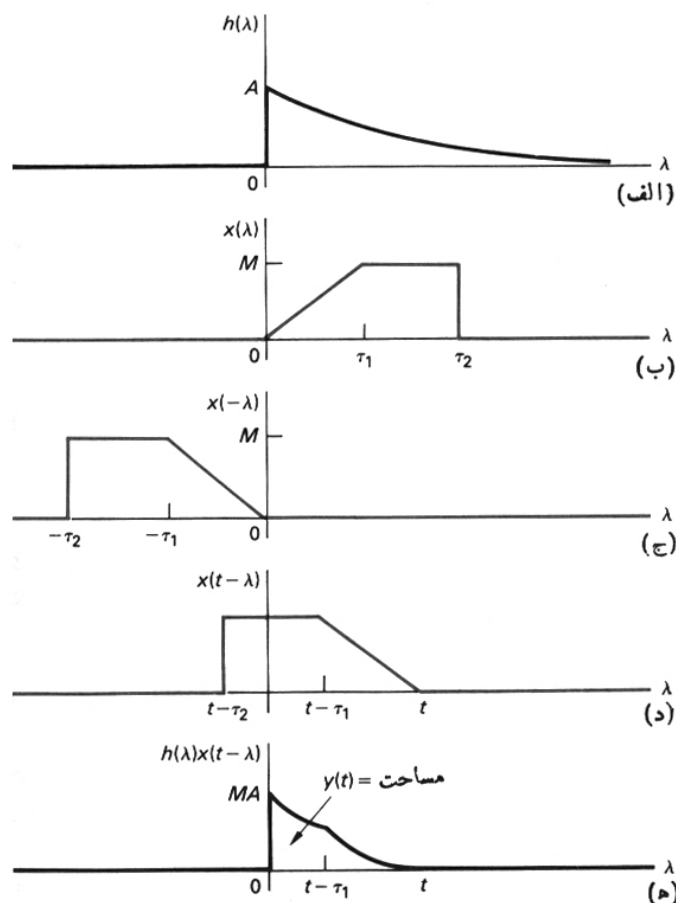
$$y(t) = \int_0^t h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \quad (۱۷-۳۸)$$

به دو دلیل می توان حدها را تغییر داد. نخست در مدارهای واقعی  $h(t)$  در  $t < 0$  برابر صفر است. یعنی پیش از اعمال ضربه، پاسخ ضربه نخواهیم داشت. دوم، اندازه گیری زمان از لحظه ای آغاز می شود که تحریک  $x(t)$  اعمال می شود؛ بنابراین در  $t < 0^-$  داریم  $x(t) = 0$ .

در بحث زیر در مورد تعبیر ترسیمی انتگرال بر ملاحظات که در مورد حدود انتگرال کانولوشن داشتیم تأکید بیشتری خواهد شد.

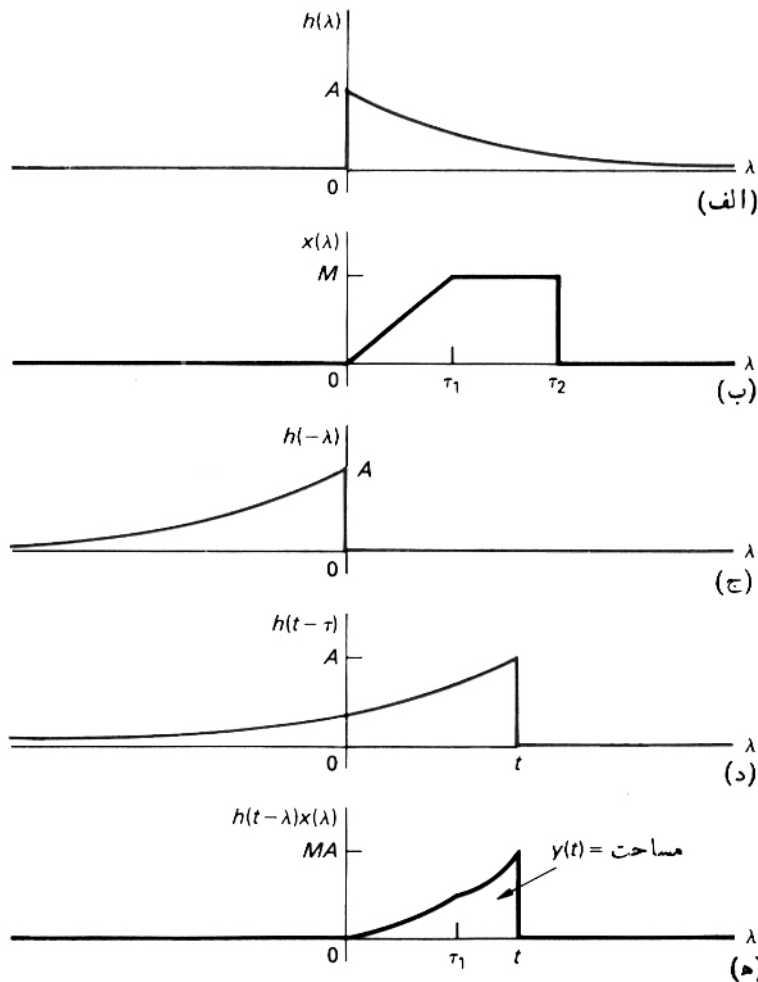
وقتی انتگرالها به عنوان ابزار محاسباتی به کار می روند تعبیر ترسیمی انتگرال کانولوشن معادله (۱۷-۳۸) بسیار مهم است. نخست به تعبیر انتگرال اول می پردازیم. برای این بحث فرض می کنیم پاسخ ضربه مدار تابع نمایی کاهشی شکل ۱۷-۱۴ (الف) باشد و تابع تحریک، شکل موجی مانند شکل ۱۷-۱۴ (ب) داشته باشد. در هر یک از این منحنیها به جای  $t$  از  $\lambda$  یعنی نماد انتگرال گیری استفاده شده است. نمایش ترسیمی  $(t-\lambda)$  در شکل ۱۷-۱۴ (ج) و (د) آمده است. چنانچه به جای  $\lambda$ ،  $-\lambda$  قرار دهیم تابع تحریک روی محور عمودی تا می شود و اگر به جای  $-\lambda$ ،  $t-\lambda$  قرار دهیم این تابع «تاشده» به طرف راست

می‌لغزد. به خاطر همین عمل تا شدن است که اصطلاح کانولوشن (به معنی پیچش) را به کار می‌بریم. برای هر مقدار مشخصی از  $t$ ، تابع پاسخ  $y(t)$  مساحت زیر تابع حاصلضرب  $h(\lambda)x(t-\lambda)$  است. این تابع در شکل ۱۷-۱۴ (هـ) آمده است. از همین منحنی روشن است که چرا باید حد پایینی انتگرال را صفر و حد بالایی را  $t$  گرفت. به ازای  $\lambda < 0$  حاصل ضرب  $h(\lambda)x(t-\lambda)$  صفر است زیرا  $h(\lambda)$  برابر صفر است. به ازای  $\lambda > t$  نیز حاصلضرب  $h(\lambda)x(t-\lambda)$  صفر است زیرا  $x(t-\lambda)$  برابر صفر است.



شکل ۱۷-۱۴: نمایش ترسیمی انتگرال کانولوشن  $\int_0^t h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda$  (الف) پاسخ ضربه، (ب) تابع تحریک (ج) تابع تحریک تا شده (د) تابع تحریک تا شده و جا به جا شده به اندازه  $t$  واحد، (ه) حاصل ضرب  $b(\lambda)x(t-\lambda)$ .

نمایش ترسیمی شکل دوم انتگرال کانولوشن در شکل ۱۷-۱۵ آمده است. توجه کنید که شکل تابع حاصل ضرب که در قسمت (هـ) آمده است قراردادن حد پایینی صفر و حد بالایی  $t$  را تأیید می کند.



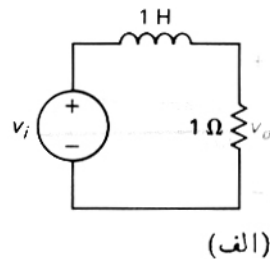
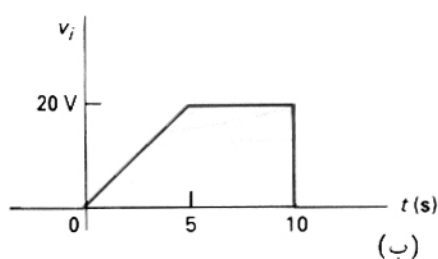
شکل ۱۷-۱۵- نمایش ترسیمی انتگرال کانولوشن  $\int_0^t h(t-\lambda)x(\lambda)d\lambda$  : الف) پاسخ ضربه ، ب) تابع تحریک ، ج) پاسخ ضربه تا شده ، د) پاسخ ضربه تا شده و جا به جا شده به اندازه  $t$  واحد ، هـ) حاصل ضرب  $h(t-\lambda)x(\lambda)$

مثال ۱۷-۳: چگونگی استفاده از انتگرال کانولوشن و پاسخ ضربه واحد برای یافتن پاسخ مدارها را نشان می دهد.

مثال ۱۷-۳: ولتاژ تحریک  $v_i$  مدار شکل ۱۷-۱۶ الف) در شکل ۱۷-۱۶ ب) آمده است.

الف) به کمک انتگرال کانولوشن  $v_o(t)$  را بیابید.

ب) منحنی  $v_o(t)$  را در گستره  $0 \leq t \leq 15s$  رسم کنید.



شکل ۱۷-۱۶: مدار و ولتاژ تحریک مثال ۱۷-۳: الف) مدار، ب) ولتاژ تحریک

حل: الف) نخستین گام در استفاده از انتگرال کانولوشن یافتن پاسخ ضربه واحد مدار است. رابطه  $V_o$  از مدار هم ارز حوزه بسامدی مدار شکل ۱۷-۱۶ (الف) به دست می آید.

بنابراین داریم

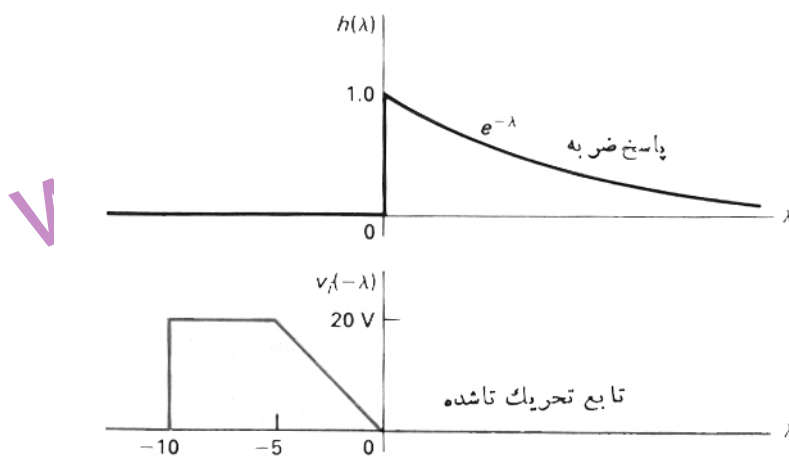
$$V_o = \frac{V_i}{(s+1)} \quad (1)$$

اگر  $v_i$  تابع ضربه واحد  $[\delta(t)]$  باشد داریم

$$v_o = h(t) = e^{-t}u(t)$$

بنابراین می توان نوشت

$$h(\lambda) = e^{-\lambda}u(\lambda)$$



شکل ۱۷-۱۷: پاسخ ضربه و تابع تحریک تا شده مثال ۱۷-۳

به کمک شکل اول انتگرال کانولوشن یعنی معادله (۱۷-۳۸) پاسخ ضربه و تابع تحریک تا شده را به دست می آوریم که در شکل ۱۷-۱۷ آمده اند. این توابع در انتخاب حدود انتگرال کانولوشن بسیار مفیدند. مشاهده می شود که چنانچه تابع تحریک تا شده را به راست بلغزانیم باید انتگرال را در سه فاصله  $0 \leq t \leq 5$ ,  $5 \leq t \leq 10$ ,  $10 \leq t \leq \infty$  محاسبه کرد. این نقاط شکست را نقاط شکست تابع تحریک یعنی ۰ و ۵ و ۱۰ ثانیه به دست می دهد. وضعیت قرارگرفتن تابع تحریک تا شده در هر یک از این سه فاصله در شکل ۱۷-۱۸ آمده است. رابطه  $v_i$  در فاصله زمانی  $0 \leq t \leq 5$  چنین است.

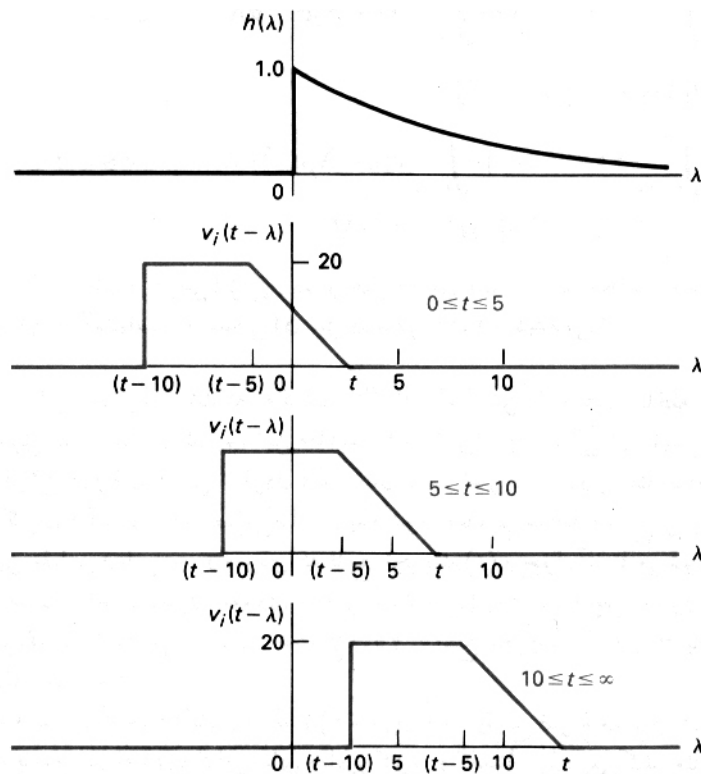
$$v_i = \xi t \quad (0 \leq t \leq 5s)$$

پس رابطه تحلیلی تابع تحریک تا شده در فاصله  $t-5 \leq \lambda \leq t$  چنین است

$$v_i(t-\lambda) = 4(t-\lambda) \quad (t-5 \leq \lambda \leq t)$$

اکنون می توان سه رابطه انتگرال  $v_o(t)$  را به دست آورده داریم

$$v_o = \int_0^t 4(t-\lambda)e^{-\lambda} d\lambda = 4(e^{-t} + t - 1)V \quad , \quad 0 \leq t \leq 5s$$



شکل ۱۷-۱۸: جابجایی  $v_i(t-\lambda)$  در سه فاصله زمانی مختلف

جدول ۱۷-۱: مقادیر عددی  $v_o(t)$

$v_o$	$t$	$v_o$	$t$	$v_o$	$t$
۷ و ۳۵	۱۱	۱۸ و ۵۴	۶	۱ و ۴۷	۱
۲ و ۷۰	۱۲	۱۹ و ۵۶	۷	۴ و ۵۴	۲
۰ و ۹۹	۱۳	۱۹ و ۸۰	۸	۸ و ۲۰	۳
۰ و ۳۷	۱۴	۱۹ و ۹۳	۹	۱۲ و ۰۷	۴
۰ و ۱۳	۱۵	۱۹ و ۹۷	۱۰	۱۶ و ۰۳	۵

به ازای  $5 \leq t \leq 10s$  ،

$$v_o = \int_0^{t-5} 20e^{-\lambda} d\lambda + \int_{t-5}^t 4(t-\lambda)e^{-\lambda} d\lambda$$

$$= 4[5 + e^{-t} + e^{-(t-5)}]V$$

$$v_o = \int_{t-10}^{t-5} 20e^{-\lambda} d\lambda + \int_{t-5}^t 4(t-\lambda)e^{-\lambda} d\lambda \quad \text{به ازای } 10s \leq t \leq \infty$$

$$= 4[e^{-t} - e^{-(t-5)} + 5e^{-(t-10)}] V$$

ب) به کمک معادله تقریبی  $v_o(t)$  در فواصل زمانی یک ثانیه ای محاسبه شده و نتایج آن

در جدول ۱۷-۱ آمده است و منحنی آن نیز در شکل ۱۷-۱۹ دیده می شود.

در آغاز این بخش گفته شد که به کمک انتگرال کانولوشن با مفاهیم حافظه و تابع توزین در

تحلیل مدار آشنا می شویم. این مفاهیم را می توان به سادگی از نمایش ترسیمی انتگرال

کانولوشن دریافت . وقتی تا کردن و لغزاندن تابع تحریک بر روی یک مقیاس زمانی که

گذشته، اکنون و آینده را مشخص می سازد دیده شود، مفاهیم حافظه و تابع توزین آشکار

می شود. در این مقیاس زمانی محور عمودی که تابع تحریک  $x(t)$  حول آن تا می شود

مقادیر کنونی  $x(t)$ ، سمت راست محور عمودی مقادیر گذشته  $x(t)$ ، و سمت چپ محور

عمودی مقادیر آینده  $x(t)$  را نشان می دهد. در شکل ۱۷-۲۰ تابع تحریک مثال ۱۷-۳ به

صورت فوق نمایش داده شده است.

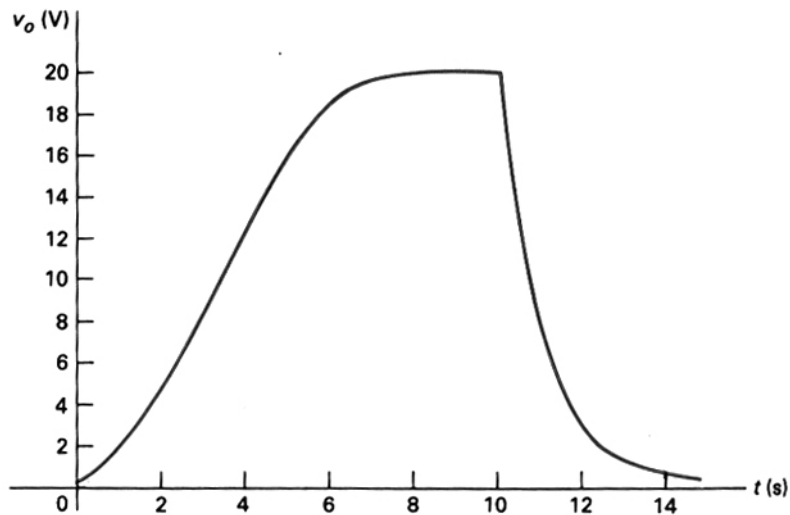
هرگاه وضعیت گذشته، اکنون و آینده  $x(t-\tau)$  را با پاسخ ضربه مدار ترکیب کنیم،

درمی یابیم که پاسخ ضربه  $x(t)$  را بر مبنای مقادیر کنونی و گذشته توزین می کند. مثلاً با

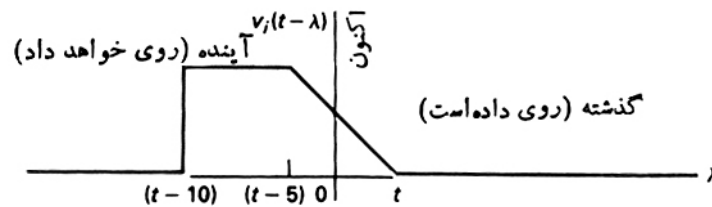
توجه به شکل ۱۷-۱۸ در می یابیم که پاسخ ضربه مثال ۱۷-۳ به مقدار گذشته  $x(t)$  نسبت

به مقدار کنونی  $x(t)$  وزن کمتری می بخشد. به دیگر سخن مدار از مقادیر گذشته ورودی،

کمتر و کمتر به یاد می آورد.



شکل ۱۹.۱۷ پاسخ ولتاژ بر حسب زمان مربوط به مثال ۱۷.۳



شکل ۲۰.۱۷ مقادیر گذشته، اکنون، و آینده تابع تحریک

مثلا توجه کنید که در شکل ۱۷-۱۹ وقتی مدار کنونی ورودی صفر است (یعنی در  $t > 10$  s)

$v_o$  چقدر سریع به صفر نزدیک می شود. به عبارت دیگر از آنجا که مقدار کنونی ورودی

وزن بیشتری از مقادیر گذشته ورودی دریافت می کند خروجی سریع به سمت مقدار کنونی

ورودی میل می کند.

به خاطر ضرب  $x(t-\lambda)$  در  $h(\lambda)$  است که پاسخ ضربه را تابع وزن ده مدار می نامند. در

عین حال تابع وزن ده بر حسب اینکه چقدر حافظه دارد، توصیف می شود. مثلا اگر پاسخ

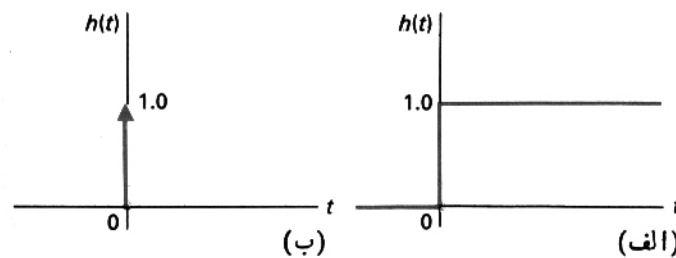
ضربه یا تابع وزن ده مانند شکل ۱۷-۲۱ (الف) هموار باشد، در این صورت به تمام مقادیر

$x(t)$  گذشته و اکنون، وزن یکسانی می دهد. چنین مداری حافظه ای کامل دارد. از طرف

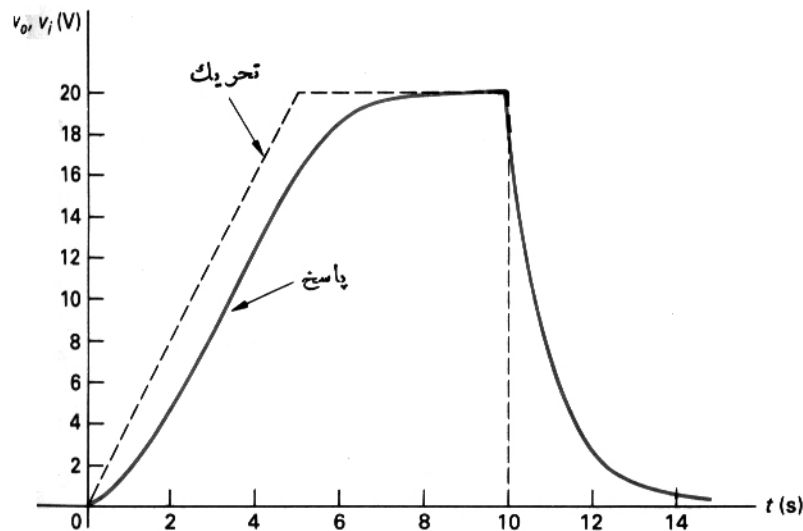


دیگر اگر پاسخ ضربه مانند شکل ۱۷-۲۱ (ب) تابع ضربه باشد، به مقادیر گذشته  $X(t)$  وزنی نمی دهد.

چنین مداری حافظه ای ندارد. حال به این نکته مهم اشاره می کنیم که هر چه مداری حافظه بیشتری داشته باشد بین شکل موج تابع تحریک و شکل موج تابع پاسخ اعوجاج بیشتری وجود دارد.



شکل ۱۷-۲۱: توابع وزن ده ، الف ( حافظه کامل ، ب) بدون حافظه



شکل ۱۷-۲۲: شکل موجهای ورودی و خروجی مثال ۱۷-۳

ساده ترین راه اثبات این مطلب این است که فرض کنیم مدار بدون حافظه است. در این حالت داریم  $h(t) = A\delta(t)$  و بنابراین با استفاده از انتگرال کانولوشن داریم.

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda \\ &= \int_0^t A\delta(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda \\ &= Ax(t)\end{aligned}\quad (39-17)$$

از معادله (39-17) در می یابیم که اگر مداری حافظه نداشته باشد، خروجی تغییر مقیاس

یافته ورودی است.

اعوجاج میان ورودی و خروجی در مداری که حافظه دارد به کمک مدار مثال 17-3 تشریح

می شود. در شکل 17-22 شکل موجهای ورودی و خروجی بر روی یک دستگاه محورهای

رسم شده اند و اعوجاج آشکار است.

مراجع:

ارنست کوه و چارلز دسور ، نظریه اساسی مدارها و شبکه ها ( جلد دوم ) ، ترجمه ی دکتر پرویز جبه دار مارالانی ، انتشارات دانشگاه تهران.

دکتر بهمن دولتشاهی ، معادلات حالت بر اساس مشخص سازی چند قطبی شبکه ها (بخش اول ) ، متن درسی ، دانشکده فنی دانشگاه تهران.

دکتر بهمن دولتشاهی ، معادلات حالت بر اساس مشخص سازی چند قطبی شبکه ها ( بخش دوم ) ، متن درسی ، دانشکده فنی دانشگاه تهران.

کتاب تحلیل مدارهای الکتریکی ، نوشته ی جیمز ویلیام نیلسون ، ترجمه علی کافی ، مرکز نشر دانشگاهی تهران .

مقاله مشترک مهدی ربانی و آرش حجام در هفتمین کنفرانس دانشجویی مهندسی برق ایران - دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی.

*P.M. DeRusso et al, State Variables for Engineers, Wiley, 1965, pp.330 and 382.*

*Robert R.Boyd , A Simplified Algorithm for State Space Circuit Analysis ,TechOnline.com*

*Robert R.Boyd ,The DC Superposition Method of Analog Circuit Analysis ,MathWorks.com*

[www.mem.ir](http://www.mem.ir)