مقدمه

علومی که از یونان باستان توسط اندیشمندان اسلامی محافظت و تکمیل شد، از قرون یازدهم میلادی به بعد به اروپا منتقل شد، بیشتر شامل ریاضی و فلسفه ی طبیعی بود. فلسفه ی طبیعی توسط کوپرنیک، برونو، کپلر و گالیله به چالش کشیده شد و از آن میان فیزیک نیوتنی بیرون آمد. چون کلیسا خود را مدافع فلسفه طبیعی یونان می دانست و کنکاش در آن با خطرات زیادی همراه بود، اندیشمندان کنجکاو بیشتر به ریاضیات می پرداختند، زیرا کلیسا نسبت به آن حساسیت نشان نمی داد. بنابراین ریاضیات نسبت به فیزیک از پیشرفت بیشتری برخوردار بود. یکی از شاخه های مهم ریاضیات هندسه بود که آن هم در هندسه ی اقلیدسی خلاصه می شد.

در هندسه ی اقلیدسی یکسری مفاهیم اولیه نظیر خط و نقطه تعریف شده بود و پنج اصل را به عنوان بدیهیات پذیرفته بودند و سایر قضایا را با استفاده از این اصول استنتاج می کردند. اما اصل پنجم چندان بدیهی به نظر نمی رسید. بنابر اصل پنجم اقلیدس از یک نقطه خارج از یک خط، یک خط و تنها یک خط می توان موازی با خط مفروض رسم کرد. برخی از ریاضیدانان مدعی بودند که این اصل را می توان به عنوان یک قضیه ثابت کرد. در این راه بسیاری از

ریاضیدانان تلاش زیادی کردند و نتیجه نگرفتند. خیام ضمن جستجوی راهی برای اثبات اصل توازی” مبتکر مفهوم عمیقی در هندسه شد. در تلاش برای اثبات این اصل، خیام گزاره ‘‘ هایی را بیان کرد که کاملا مطابق گزاره هایی بود که چند قرن بعد توسط والیس و ساکری ریاضیدانان اروپایی بیان شد و راه را برای ظهور هندسه های نااقلیدسی در قرن نوزدهم هموار کرد. سرانجام و پس از دو هزار سال اصولی متفاوت با آن بیان کردند و هندسه های نااقلیدسی شکل گرفت. بدین ترتیب علاوه بر فلسفه ی طبیعی ریاضیات نیز از انحصار یونانی خارج و در مسیری جدید قرار گرفت و آزاد اندیشی در ریاضیات آغاز گردید.

۵-۱ اصطلاحات بنیادی ریاضیات

طی قرنهای متمادی ریاضیدانان اشیاء و موضوع های مورد مطلعه ی خود از قبیل نقطه و خط و عدد را همچون کمیت هایی در نظر می گرفتند که در نفس خویش وجود دارند. این موجودات همواره همه ی کوششهای را که برای تعریف و توصیف شایسته ی آنان انجام می شد را با شکست مواجه می ساختند. بتدریج این نکته بر ریاضیدانان قرن نوزدهم آشکار گردید که تعیین مفهوم این موجودات نمی تواند در داخل ریاضیات معنایی داشته باشد. حتی اگر اصولاً دارای معنایی باشند.

بنابراین، اینکه اعداد، نقطه و خط در واقع چه هستند در علوم ریاضی نه قابل بحث است و نه احتیاجی به این بحث هست. یک وقت براتراند راسل گفته بود که ریاضیات موضوعی است که در آن نه می دانیم از چه سخن می گوییم و نه می دانیم آنچه که می گوییم درست است.

دلیل آن این است که برخی از اصطلاحات اولیه نظیر نقطه، خط و صفحه تعریف نشده اند و ممکن است به جای آنها اصطلاحات دیگری بگذاریم بی آنکه در درستی نتایج تاثیری داشته باشد. مثلاً می توانیم به جای آنکه بگوییم دو نقطه فقط یک خط را مشخص می کند، می توانیم بگوییم دو آلفا یک بتا را مشخص می کند. با وجود تغییری که در اصطلاحات دادیم، باز هم اثبات همه ی قضایای ما معتبر خواهد ماند، زیرا که دلیل های درست به شکل نمودار بسته نیستند، بلکه فقط به اصول موضوع که وضع شده اند و قواعد منطق بستگی دارند.

بنابراین، ریاضیات تمرینی است کاملاً صوری برای استخراج برخی نتایج از بعضی مقدمات صوری. ریاضیات احکامی می سازند به صورت هرگاه چنین باشد، آنگاه چنان خواهد شد و اساساً در آن صحبتی از معنی فرضها یا راست بودن آنها نیست. این دیدگاه (صوریگرایی) با عقیده ی کهن تری که ریاضیات را حقیقت محض می پنداشت و کشف هندسه های

نااقلیدسی بنای آن را درهم ریخت، جدایی اساسی دارد. این کشف اثر آزادی بخشی بر ریاضیدانان داشت.

اشکالات وارد بر هندسه اقلیدسی ۲-۵

هندسه ی اقلیدسی بر اساس پنج اصل موضوع زیر شکل گرفت:

اصل اول - از هر نقطه می توان خط مستقیمی به هر نقطه ی دیگر کشید.

اصل دوم - هر پاره خط مستقیم را می توان روی همان خط به طور نامحدود امتداد داد.

اصل سوم - می توان دایره ای با هر نقطه دلخواه به عنوان مرکز آن و با شعاعی مساوی هر پاره خط رسم کرد.

اصل چهارم - همه ی زوایای قائمه با هم مساوی اند.

اصل پنجم - از یک نقطه خارج یک خط، یک خط و و تنها یک خط می توان موازی با خط مفروض رسم کرد.

اصل پنجم اقلیدس که ایجاز سایر اصول را نداشت، به هیچوجه واجد صفت بدیهی نبود. در واقع این اصل بیشتر به یک قضیه شباهت داشت تا به یک اصل. بنابراین طبیعی بود که لزوم واقعی آن به عنوان یک اصل مورد سئوال قرار گیرد. زیرا چنین تصور می شد که شاید بتوان آن را به عنوان یک قضیه نه اصل از سایر اصول استخراج کرد، یا حداقل به جای آن می توان معادل قابل قبول تری قرار داد.

در طول تاریخ ریاضیدانان بسیاری از جمله، خواجه نصیرالدین طوسی، جان والیس، لژاندر، فورکوش بویوئی و... تلاش کردند اصل پنجم اقلیدس را با استفاده از سایر اصول نتیجه بگیرنر و آن را به عنوان یک قضیه اثبات کنند. اما تمام تلاشها بی نتیجه بود و در اثبات دچار خطا می شدند و به نوعی همین اصل را در اثباط خود به کار می بردند. دلامبر این وضع را افتضاح هندسه نامید.

یانوش بویوئی یکی از ریاضیدانان جوانی بود که در این را تلاش می کرد. پدر وی نیز ریاضیدانی بود که سالها در این این مسیر تلاش کرده بود .

و طی نامه ای به پسرش نوشت: تو دیگر نباید برای گام نهادن در راه توازی ها تلاش کنی، من پیچ و خم این راه را از اول تا آخر می شناسم. این شب بی پایان همه روشنایی و شادمانی زندگی مرا به کام نابودی فرو برده است، التماس می کنم دانش موازیها را رها کنی.

ولی یانوش جوان از اخطار پدیر نهرسید، زیرا که اندیشه ی کاملاً تازه ای را در سر می پروراند. او فرض کرد نقیض اصل توازی اقلیدس، حکم بی معنی ای نیست. وی در سال ۱۸۲۳ پدرش را محرمانه در جریان کشف خود قرار داد و در سال ۱۸۳۱ اکتشافات خود را به صورت ضمیمه در کتاب تنتامن پدرش منتشر کرد و نسخه ای از آن را برای گائوس فرستاد. بعد معلوم شد که گائوس خود مستقلاً آن را کشف کرده است.

بعدها مشخص شد که لباچفسکی در سال ۱۸۲۹ کشفیات خود را در باره هندسه نااقلیدسی در بولتن کازان، دو سال قبل از بوئی منتشر کرده است. و بدین ترتیب کشف هندسه های نااقلیدسی به نام بویوئی و لباچفسکی ثبت گردید.

هندسه های نا اقلیدسی ۳-۵

اساساً هندسه نااقلیدسی چیست؟ هر هندسه ای غیر از اقلیدسی را نا اقلیدسی می نامند. از این گونه هندسه ها تا به حال زیاد شناخته شده است. اختلاف بین هندسه های نا اقلیدسی و

اقلیدسی تنها در اصل توازی است. در هندسه اقلیدسی به ازای هر خط و هر نقطه نا واقع بر آن یک خط می توان موازی با آن رسم کرد.

تعداد خطوط موازی که از یک نقطه نا واقع بر آن، می توان رسم کرد، بیش از یکی است. و یا اصلاً خطوط موازی وجود ندارند. با توجه به این دو نقیض، هندسه های نا اقلیدسی را می توان به دو گروه تقسیم کرد. نقیض این اصل را به دو صورت می توان در نظر گرفت

یک – هندسه های هذلولوی

هندسه های هذلولوی توسط بویوئی و لباچفسکی بطور مستقل و همزمان کشف گردید.

اصل توازی هندسه هذلولوی – از یک خط و یک نقطه ی نا واقع بر آن دست کم دو خط موازی با خط مفروض می توان رسم کرد.

دو – هندسه های بیضوی

در سال ۱۸۵۴ فریدریش برنهارد ریمان نشان داد که اگر نامتناهی بودن خط مستقیم کنار گذاشته شود و صرفاً بی کرانگی آن مورد پذیرش واقع شود، آنگاه با چند جرح و تعدیل جزئی

اصول موضوعه دیگر، هندسه سازگار نااقلیدسی دیگری را می توان به دست آورد. پس از این تغییرات اصل توازی هندسه بیضوی بصورت زیر ارائه گردید.

اصل توازی هندسه بیضوی - از یک نقطه ناواقع بر یک خط نمی توان خطی به موازات خط مفروض رسم کرد.

یعنی در هندسه بیضوی، خطوط موازی وجود ندارد. با تجسم سطح یک کره می توان سطحی شبیه سطح بیضوی در نظر گرفت. این سطح کروی را مشابه یک صفحه در نظر می گیرند. در اینجا خطوط با دایره های عظمیه کره نمایش داده می شوند. بنابراین خط ژئودزیک یا مساحتی در هندسه بیضوی بخشی از یک دایره عظیمه است.

درجه است. در هندسه بیضوی با در هندسه بیضوی مجموع زوایای یک مثلث بیشتر از ۱۸۰ حرکت از یک نقطه و پیمودن یک خط مستقیم در آن صفحه، می توان به نقطه ی اول باز گشت. همچنین می توان دید که در هندسه بیضوی نسبت محیط یک دایره به قطر آن همواره کمتر از عدد پی است.

انحنای سطح یا انحنای گائوسی ۴-۵

به خطی k اگر خط را راست فرض کنیم نه خمیده، چنانچه ناگزیر باشیم یک انحنای عددی برابر است با r انحنای یک دایره به شعاع $k=o$ نسبت دهیم برای خط راست خواهیم داشت

$k=۱/r.$

تعریف می کنند. همچنین منحنی هموار، منحنی ای است که مماس بر هر نقطه اش به طور پیوسته تغییر کند. به عبارت دیگر منحنی هموار یعنی در تمام نقاطش مشتق پذیر باشد.

برای به دست آوردن انحنای یک منحنی در یک نقطه، دایره بوسان آنرا در آن نقطه رسم کرده، انحنای منحنی در آن نقطه برابر با انحنای دایره ی بوسان در آن نقطه است. دایره بوسان در یک نقطه از منحنی، دایره ای است که در آن نقطه با منحنی بیشترین تماس را دارد. توجه شود که برای خط راست شعاع دایره بوسان آن در هر نقطه واقع بر آن بینهایت است.

برای تعیین انحنای یک سطح در یک نقطه، دو خط متقاطع مساحتی در دو جهت اصلی در آن نقطه انتخاب کرده و انحنای این دو خط را در آن نقاط تعیین می کنیم. فرض کنیم انحنای این دو خط

$k_۱=۱/R_۱$ and $k_۲=۱/R_۲$

: باشند. آنگاه انحنای سطح در آن نقطه برابر است با حاصلضرب این دو انحنا، یعنی

$k=۱/R_۱R_۲$

:انحنای صفحه ی اقلیدسی صفر است. همچنین انحنای استوانه صفر است

$k=o$

:برای سطح هذلولوی همواره انحنای سطح منفی است

$k<>$

: برای سطح بیضوی همواره انحنا مثبت است

$k>o$

:در جدول زیر هر سه هندسه ها با یکدیگر مقایسه شده اند

اندازه انحنا	نسبت محیط به قطر دایره	مجموع زوایای مثلث	تعداد خطوط موازی	نوع هندسه

صفر	عدد پی	۱۸۰	یک	اقلیدسی
منفی	عدد پی >	< 180	بینهایت	هذلولوی
مثبت	عدد پی >	۱۸۰ <	صفر	بیضوی

مفهوم و درک شهودی انحنای فضا ۴-۶

سئوال اساسی این است که کدام یک از این هندسه های اقلیدسی یا نا اقلیدسی درست است؟

پاسخ صریح و روشن این است که باید انحنای یک سطح را تعیین کنیم تا مشخص شود کدام یک درست است. بهترین دانشی که می تواند در شناخت نوع هندسه ی یک سطح مورد استفاده و استناد قرار گیرد، فیزیک است. یک صفحه ی کاغذ بردارید و در روی آن دو خط متقاطع رسم کنید. سپس انحنای این خطوط را در آن نقطه تعیین کرده و با توجه به تعریف انحنای سطح حاصلضرب آن را به دست می آوریم. اگر مقدار انحنا برابر صفر شد، صفحه اقلیدسی است، اگر منفی شد می گوییم صفحه هذلولوی است و در صورتی که مثبت شود، ادعا می کنیم که صفحه بیضوی است.

در کارهای معمولی مهندسی نظیر ایجاد ساختمان یا ساختن یک سد بر روی رودخانه، انحنای سطح مورد نظر برابر صفر است، به همین دلیل در طول تاریخ مهندسین همواره از هندسه اقلیدسی استفاده کرده اند و با هیچگونه مشکلی هم مواجه نشدند. یا برای نقشه برداری از سطح یک کشور اصول هندسه ی اقلیدسی را بکار می برند و فراز و نشیب نقاط مختلف آن را در این محاسبات ما می توانیم از خطکش هایی که در آزمایشگاه یا کارخانه .مشخص می کنند ها ساخته می شود، استفاده کنیم. حال سئوال این است که اگر خطکش مورد استفاده ی ما تحت تاثیر شرایط محیطی قرار بگیرد چه باید کرد؟ اما می دانیم از هر ماده ای که برای ساختن خطکش استفاده کنیم، شرایط فیزیکی محیط بر روی آن اثر می گذارد. البته با توجه .با تاثیر محیط بر روی خطکش ما تلاش می کنیم از بهترین ماده ی ممکن استفاده کنیم .بهمین دلیل چوب از لاستیک بهتر است و آهن بهتر از چوب است

اما برای مصافتهای دور نظیر فواصل نجومی از چه خطکشی (متری) می توانیم استفاده کنیم؟ طبیعی است که در اینجا هیچ خطکشی وجود ندارد که بتوانیم با استفاده از آن فاصله ی بین زمین و ماه یا ستارگان را اندازه بگیریم. بنابراین باید به سایر امکاناتی توجه کنیم که در عمل قابل استفاده است. اما در اینجا چه امکاناتی داریم؟ بهترین ابزار شناخته شده امواج

الکترومغناطیسی است. اگر مسیر نور در فضا خط مستقیم باشد، در اینصورت با جرت می توانیم ادعا کنیم که فضا اقلیدسی است. برای پی بردن به نوع انحنای فضا باید مسیر پرتو نوری را مورد بررسی قرار دهیم .

اما تجربه نشان می دهد که مسیر نور هنگام عبور از کنار ماده یعنی زمانی که از یک میدان گرانشی عبور می کند، خط مستقیم نیست، بلکه منحنی است. بنابراین فضای اطراف اجسام اقلیدسی نیست. به عبارت دیگر ساختار هندسی فضا نااقلیدسی است