یزی که همیشه بموازات زیبایی ها و شگفتی های ریاضیات برای من جذابیت داشته و به نظر من این یک جذابیت ابدی است، قدرت شگرف و خارق العاده ریاضیات است در تشخیص و کشف حقیقت، بخصوص جایی که فکر و ذهن و حواس عمومی انسان از تشخیص آن عاجز است و به بیراهه میرود.

گفته شده است که ریاضیات زاده نبوغ بشر است. این گفته کاملا" درست است. اگر بشر خلقت نمی یافت ریاضیات هم بوجود نمی آمد. قبل از بشر هستی بود، طبیعت بود، فیزیک بود، شیمی بود، تاریخ و جغرافیا بود، زمین بود، حیات بود، در واقع همه چیز بود اما شمارش نبود، عدد نبود. بشر آمد، عدد آورد، شمارش آورد، دستگاه دهدهی خلق کرد(شاید بخاطر آنکه ده انگشت داشت)و کم کم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و جبر و هندسه و مثلثات آورد و اخیرا" هم کلکولس و ریاضیات جدید را خلق کرد و بدان افزود و هنوز هم در حال گسترش آنست. پس تردیدی نیست که "کودک ریاضیات" از "مادر مغز" بشر زاده شده است. اما جالب اینجاست که این کودک در تشخیص حقیقت بسی از مادر هوشمند تر است. آنگاه که

فکر ما از درک حقیقتی عاجز میشود و به بیراهه میرود، اگر آنجا قلمرو ریاضیات باشد، این ریاضیات است که راه را نشان میدهد، حقیقت را کشف میکند و جواب را بدست میاورد.

به چند مسئله ی زیر که در دوران تحصیل یا تدریس ریاضیات به آنها بر خورده ام و برای اثبات مدعای فوق مثالهای بسیار خوبی هستند توجه فرمایید و ببینید برای حل کردن این مسائل و صد ها مسئله مشابه دیگر ذهن آدمی چگونه بطور طبیعی و غریزی به بیراهه میرود و از جواب بدور میافتد.

مثال یک. مزرعه ای است به شکل زیر که مساحتش **۵۰۰۰** متر مربع است(نیم هکتار).

میخواهیم با کشیدن دیوار مستقیمی در داخل مزرعه، آنرا به دو بخش تقسیم کنیم بطوریکه مساحت های هر دو بخش با هم برابر باشند (هر یک برابر ۲۵۰۰ متر مربع باشد). طول کوتاه ترین دیوار ممکن چند متر است و کجا باید کشیده شود؟

(قبل از اینکه ادامه مطلب را بخوانید، لطفا" چند دقیقه به مسئله فکر کنید)

راه حلی که فورا" و بطور غریزی به ذهن خطور میکند در شکل (۱) نشان داده شده است.در این شکل، دیوار، مزرعه را به دو مثلث دیگر تقسیم میکند که مساحت هر کدامشان ۲۵۰۰ متر مربع است.طول دیوار هم به سادگی قابل محاسبه است(تا دو رقم اعشار برابر است با m ۷۰.۷۱). دو راه حل دیگر هم برای مسئله بنظر میرسد که در شکلهای (۲) و (۳) نشان داده شده اند. در این دو شکل هر دیوار، مزرعه را به یک ذوذنقه و یک مثلث تقسیم میکند که مساحتهایشان با هم برابر است. محاسبه ی طول دیوارها هم کار مشکلی نیست و در شکلها نشان داده شده است.

این سه راه حل چیزی است که به نظر بیشتر افراد میرسد. احتمالا" شما هم به یکی از این راه حلها فکر کرده اید. دیوار شکل (۳) البته مردود است زیرا طول آن صد متر است و این بلند تر از دیوارهای دو شکل دیگر است. دیوارهای شکلهای (۱)و (۲) اگر چه کوتاه ترند اما آنها نیز جواب نهایی مسئله نیستند. حقیقت امر این است که دیوار کوتاه تری وجود دارد که مزرعه را

به دو بخش با مساحتهای مساوی تقسیم میکند. اما این دیوار کجا باید کشیده شود و طول آن چقدر است؟ ایا دیوار میتواند بصورت شکلهای (۴) یا (۵) باشد؟

بدیهی است که دیوار شکل (۴) از دیوار شکل (۱) طولانی تر میباشد، مضافا" اینکه مساحتها نیز نابرابرند. پس این راه حل نیز مردود است. دیوار شکل (۵) میتواند کوتاه تر از دیوار شکل (۱) باشد اما بنظر نمیرسد که مساحتهای دو قطعه زمین با هم برابر باشند، اگر اینچنین باشد این راه حل هم مورد تردید است. پس این دیوار مرموز کجاست و طول آن چقدر است؟ اینجا جز آنکه ریاضیات پا در میان نهد و جواب را پیدا کند راه دیگری نیست. من عجالتا" جواب مسئله را به شما میگویم : طول کوتاه ترین دیوار ممکن **۶۴.۳۶ m** است، اما پیدا کردن این جواب و اینکه دیوار کجا باید کشیده شود را فعلا" به عهده خودتان میگذارم تا بعدا" در قسمت مسائل هفتگی دوباره آنرا بررسی کنیم.

****

مثال دو. در یک مجلس جشن تعداد زیادی از دوستان شما شرکت کرده اند و شما میخواهید در پایان جشن جوایزی را مشترکا" به کسانی بدهید که روز تولدشان یکی است، مثلا" همه در دهم تیر ماه بدنیا آمده اند(ولی الزاما همسن نیستند). حد اقل چند نفر باید در جشن حضور داشته باشند تا به احتمال صددرصد، دست کم دو نفرشان روز تولد مشترکی داشته باشند؟

البته این سوال مشکلی نیست. در مبحث تئوری اعداد و احتمالات، اصلی است بنام "اصل لانه کبوتری" یا Pigeonhole Principle که میگوید اگر مثلا" شش کبوتر داشته باشیم و تنها پنج لانه، وقتی همه کبوتر ها به لانه ها برگردند دست کم یکی از لانه ها بیش از یک کبوتر دارد. اصلی است ساده مثل سایر اصول و درک انهم اسان است. بر اساس این اصل و اگر سال را ۳۶۵ روز فرض کنیم باید دست کم ۳۶۶ نفر در جشن حضور داشته باشند تا حد اقل دو نفرشان دارای یک روز تولد باشند.

حالا مسئله را کمی مشکل تر کنیم. بگویید حد اقل چند نفر در جشن باید حضور داشته باشند تا به احتمال قریب به یقین(مثلا" ۹۷ در صد)دست کم دو نفرشان دارای یک روز تولد باشند. ظاهرا" مسئله تغییر زیادی نکرده است پس جواب آنهم نباید تغییر زیادی بکند. من وقتیکه این مسئله را در سر کلاسهای درسم مطرح میکنم، تقریبا" تمام دانشجویانم _قبل از آنکه بیاموزند چگونه بصورت سیستماتیک مسئله را حل کنند_ بطور غریزی ۳ در صد از جمعیت را کم میکنند و جواب میدهند که دست کم باید ۳۵۴ نفر حضور داشته باشند تا به احتمال ۹۷ در صد روز تولد اقلا" دو نفرشان مثل هم باشد. شاید شما هم همین فکر را کرده و همین جواب یا جوابی در همین حدود را داده باشید. این جواب اگر چه بنظر خوب میاید اما اشتباه است. حقیقت در این مورد نیز چون مثال قبل چیز دیگری است که فقط با کمک ریاضیات قابل دسترسی است و حدس و گمان نمیتواند آنرا معلوم کند.

جواب این مسئله ۵۰ نفر است اما تردیدی ندارم که این جواب باعث تعجب شما شده است زیرا باور کردنش منحصرا" بر اساس "حواس عمومی" مشکل است. اگر قرار است ۳۶۶ نفر حضور داشته باشند تا با احتمال صد در صد، دست کم دو نفرشان یک روز تولد داشته باشند،

چطور ممکن است برای همینکه این احتمال ۹۷ در صد باشد باید فقط ۵۰ نفر در جشن حضور داشته باشند؟ آنچه پذیرفتنش برای ذهن آدمی آسان تر است در واقع عکس این مطلب است یعنی احتمالش بسیار ضعیف است که از میان ۵۰ نفر آدم حتی دو نفرشان یک روز تولد داشته باشند. در اینجا نیز "استدلال ریاضی" پا در میان مینهد و جواب را تایید میکند و به هر گونه ابهامی پایان میدهد. این مسئله را نیز در بخش مسائل هفتگی دو باره پیش خواهیم کشید.

****

مثال سه. یک جعبه بشکل مکعب مستطیل به ابعاد ۲۴ cm در ۳۶ cm و بلندی ۱۳ cm روی میز قرار گرفته و به سطح میز چسبانده شده است. مورچه ای در نقطه A و حبه قندی در نقطه C قرار دارد. کوتاه ترین راهی که مورچه میتواند به قند برسد کدام است

و طول آن چند سانتیمتر میباشد؟ به شکل زیر نگاه کنید و قبل از آنکه دنباله ی مطلب را بخوانید، چند لحظه فکر کنید. بنظر شما کوتاه ترین راه کدامست؟

هیچ حقه ای در کار نیست. مسئله بسیار آسان است و آنرا بی جهت سخت نکنید. کوتاه ترین راه مسیرABC است که طول آن دقیقا" cm ۶۰ میباشد(توجه داشته باشید که از زیر جعبه راهی برای عبور نیست چون جعبه به میز چسبانده شده است)

بنظر نمیرسد که یک مورچه عاقل برای رفتن از A به C مسیری مثل ADC را انتخاب کند (شکل بالا : D نقطه ایست روی یال BM)چرا که مسیر ADC از مسیر ABC طولانی تر است(این بسیار بدیهی است). بنظر نیز نمیرسد که این مورچه عاقل مسیری مثل AEC را برگزیند(E نقطه ایست روی میز که از آنجا میتوان نقاط A و C را دید) زیرا واضح

است که هر دو مثلث ABE و CBE در زاویه B منفرجه اند و بنابراین $AE > AB$ و $CE > CB$ است. در نتیجه مجموع $AE + EC$ از ۶۰ cm بیشتر میشود.

حالا بیایید جعبه دیگری را انتخاب کنیم که قاعده آن ۲۳ cm در ۱۵ cm سانتیمتر و بلندی آن ۷ cm باشد و مورچه را باز در نقطه A وقند را در نقطه C قرار دهیم. حال چه فکر میکنید؟ کوتاه ترین راهی که مورچه میتواند به قند برسد چند سانتیمتر است؟

با آنکه صورت مسئله در اساس تغییری نکرده است و فقط جعبه دیگری انتخاب شده است که قدری کوچکتر است (میتوانست بزرگتر باشد) معهذا دیگر مسیر ABC که برابر ۳۸ cm است کوتاه ترین راه نیست بلکه راهی کوتاه تر وجود دارد. این قدری عجیب بنظر میرسد و باور کردنش در بدو امر مشکل است ولی حقیقت دارد، حقیقتی که فقط بکمک ریاضیات قابل دسترسی است. آیا شما میتوانید مسیری کوتاه تر از ۳۸ cm برای مورچه پیدا کنید؟ این مسئله را نیز در بخش مسائل هفتگی مورد بررسی مجدد قرار خواهیم داد.

****

مثال چهارم. یک عدد یک رقمی انتخاب کنید : مثلا ۵ را.

حالا اعداد صحیح یک تا ده را در نظر بگیرید. جمعا" ده عدد هستند که فقط یکی از آنها ۵ است. پس میتوانیم بگوییم که در مجموعه ی اعداد صجبح یک تا ده، ده در صدشان ۵ دارند و نود در صدشان ۵ ندارند.

اینک اعداد صحیح یک تا صد را در نظر بگیرید. آیا میتوانید حساب کنید که چند تا از این صد عدد دارای (اقلا" یک) رقم ۵ هستند و چند تای آنها اصلا" رقم ۵ ندارند؟ کار مشکلی نیست. من در زیر اعدادی را که دارای (اقلا" یک) رقم ۵ هستند به ترتیب نوشته ام :

۳۵، ۴۵، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۵، ۷۵، ۸۵، ۹۵

۵، ۱۵، ۲۵،

عدد هم وجود دارند که اصلن رقم 81 بنابراین .تا میشوند 19 "آنها را بشمارید. جمعا 5 درصدشان 19 ندارند. پس میتوانیم بگوییم که در مجموعه ی اعداد صحیح یک تا صد، 5 دارند و 81 درصدشان اصلا" 5 ندارند.

اینک اعداد صحیح یک تا هزار را در نظر بگیرید. ایا میتوانید بگویید که از میان این هزار عدد چند تای آنها دارای (اقلا" یک) رقم ۵ هستند و چند تا اصلا" ۵ ندارند؟ این یکی قدری زحمت دارد ولی بهر حال این نیز کار مشکلی نیست. من آنرا برای شما حساب کرده ام ولی بد

نیست شما خودتان هم آنرا حساب کنید : در مجموعه ی اعداد یک تا هزار، دقیقا" ۲۷۱ عدد هستند که ۵ دارند و ۷۲۹ عدد هم هستند که اصلا" ۵ ندارند.

با اندکی زحمت بیشتر، میتوانیم معلوم سازیم که از مجموعه ی اعداد صحیح یک تا ده هزار، چند تا دارای ۵ هستند و چند تا اصلا" ۵ ندارند و اینکار را میتوانیم به مجموعه های بزرگتری از اعداد مثلا" یک تا صد هزار، یک تا یک میلیون و غیره نیز گسترش دهیم.

همانطوری که تا کنون ملاحظه کرده اید، صرفنظر از اینکه چه مجموعه ای از اعداد را انتخاب کنید، یک تا ده، یک تا صد، یک تا هزار و غیره، آنچه مسلم است اینستکه در هر مجموعه، تعداد اعدادی که رقم ۵ ندارند بمراتب بیشتر است از تعداد اعدادی که دارای رقم ۵ هستند. حالا با این دستگرمی میخواهم سوال اصلی ام را از شما بپرسم : **اگر همه اعداد صحیح و مثبت را در نظر بگیرید، از یک تا بینهایت را، ایا میتوانید حساب کنید که چند در صدشان ۵ دارند؟**

جواب این سوال دیگر خیلی ساده نیست زیرا واقعا" عملی نیست که بنشینیم و از میان بینهایت عدد، آنهایی را که دارای ۵ هستند بشماریم. پس باید راهی هوشمندانه برای حل این مسئله وجود داشته باشد که من عجالتا" پیدا کردن آن راه حل را بعهده شما میگذارم و در اینجا فقط به جواب مسئله بسنده میکنم و اثبات آنرا به بخش مسائل هفتگی موکول مینمایم.

جواب این مسئله "صد در صد" است! بله،درست خواندید، صد در صد! در مجموعه اعداد صحیح یک تا بینهایت، صد در صدشان دارای ۵ هستند. یقین دارم که این جواب شما را شگفت زده و شاید هم کمی گیج کرده باشد و بعید میدانم که آنرا باور کرده باشید. چه بسا دارید پیش خود فکر میکنید که مگر ایشان همین یکدقیقه پیش خودشان نگفتند که از اعداد یک تا ده، ۹ تای آنها و از اعداد یک تا صد، ۸۱ تای آنها و از اعداد یک تا هزار، ۷۲۹ تای آنها اصلا" ۵ ندارند، و هر چه جلو تر برویم، و هر مجموعه ای از اعداد صحیح را که انتخاب کنیم، تعداد اعدادی که رقم ۵ ندارند بمراتب بیشتر است از تعداد اعدادی که رقم ۵ دارند.

آیا اینها کافی نیستند تا به جواب فوق شک کنیم؟ آخر این جواب که با عقل جور در نمیاید. چطور ممکن است از مجموعه ی اعداد یک تا بینهایت، صد در صدشان دارای ۵ باشند در حالیکه ما اعداد فراوانی را میشناسیم که رقم ۵ اصلا" در آنها یافت نمیشود.

ولی حقیقت امر همان است که گفته شد.

علت پیچیدگی موضوع به مقدار زیادی بستگی دارد به مفهوم کلمه " بینهایت". بینهایت در ریاضیات چیز مرموزی است و رفتارش با بقیه ی اعداد فرق میکند. اصلا" بینهایت عدد نیست، یک "مفهوم" است که باید مطلقا" درک گردد و راه کار کردن با آن آموخته شود.

نکته ی مورد نظر من هم از انتخاب و بیان مثالهای فوق دقیقا" همین است که بگویم مسائلی که در ابتدا با اندیشه ی ما جور در نمی آیند و بواسطه ی پیچیدگی صورت یا غامض بودن جواب براحتی قابل فهم نیستند، با برهان و استدلال ریاضی شکل دیگری پیدا میکنند : روشن میشوند و قابل درک میگردند. استدلال ریاضی اگر چه زاییده مغز بشر است ولی قدرتش در

تشخیص و کشف حقیقت از مغز بیشتر است. وقتیکه مثال فوق را در بخش مسائل هفتگی و با استفاده از مدل و استدلال ریاضی حل کنیم خواهید دید که جواب "صد در صد" چطور شما را قانع میکند. اما حتی پس از قانع شدن، وقتیکه دو باره به موضوع فکر میکنید که چطور ممکن است صد در صد اعداد، دارای ۵ باشند دچار سر گیجه میشوید. این سر گیجه همانطور که گفته شد ناشی از مفهوم بینهایت است. "بینهایت" بینهایت سر گیجه آور است! مثالهای فوق و مثالهای بسیار دیگری که در مطالعه ریاضیات و یا در زندگی روز مره به آن برخورد خواهید کرد، موید این نظر است که قضاوت ما در باره ی جواب یک مسئله_ اگر در حل مسئله مددی از ریاضیات نگرفته باشیم _ ممکن است دارای خطا باشد. برای از بین بردن خطا چاره ای نداریم جز آنکه مسئله را با یک مدل دقیق ریاضی حل کنیم.