درون یابی:

فرض کنید $n+1$ نقطه متمایز مانند $\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_n \\ y_n \end{vmatrix}$ در صفحه مفروضند، تابع f را می خواهید چنان پیدا کنیم که از تمامی این نقاط عبور کند. یعنی $f_i = y_i = f(x_i)$ و همچنین می خواهیم $f(x)$ را برای نقاط دیگر بر آورد کنیم.

فرض می کنیم $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ نقاط از کوچک به بزرگ شده باشد و $x\varepsilon[x_0, x_n]$ به طوری که $x \neq x_i$ در این صورت مساله تخمین $f(x)$ را درون یابی می نامند.

در این فصل تنها درون یابی به وسیله چند جمله ای ها بررسی می‌شود یعنی تابع f را یک تابع چند جمله مانند $P_n(x)$ که یک چند جمله ای به درجه n در نظر می گیریم.

می دانیم از نقطه متمایز یک خط می گذرد از سه نقطه متمایز یک سهمی می گذرد و ... به همین ترتیب از n+1 نقطه متمایز یک چند جمله درجه n عبور می کند.

در روش زیر که به روش لاگرانژ معروف است راهی برای رسیدن به این چند جمله ای مطرح می کند.

روش لاگرانژ

در حالت ساده برای دو نقطه $A\left|\begin{matrix} x_0 \\ f_0 \end{matrix}\right.$ $B\left|\begin{matrix} x_1 \\ f_1 \end{matrix}\right.$ معادله خط

$$AB : y - f = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0)$$

$$A\left|\begin{matrix} x_0 \\ f_0 \end{matrix}\right. \quad AB : y - f_0 = \frac{f_i - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$B\left|\begin{matrix} x \\ f_1 \end{matrix}\right. \quad y = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_{x0}}(x - x_0) = \frac{f_0(x_1 - x_0) + f(f_1 - f_0)(x - x_0)}{x_1 - x_0} =$$

$$\frac{f_0(x_1 - n_0 - x + n_0) + f_i(x - x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$y = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - c_1} + f_1 \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = P_1(x)$$

نتیجه فوق باعث به وجود امدن این ایده برای لاگرانژ که چند جمله ای $p_{n(x)}$ را تعمیمی از حالت بالا درنظر بگیرد. ثابت می‌شود که:

فقط یک چند جمله ای حداکثر از درجه n مانند $p_{n(x)}$ وجود دارد به طوری که

$$(i = 0,1,\ldots,n) \quad (۱) \quad P(x_i) = f_i$$

فرض کنید $P(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \ldots + f_n L_n(x)$ در این صورت شرط (۱) برقرار خواهد بود هرگاه:

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ L_i(x_j) = 0 \quad i \neq j \end{cases}$$

برای تعیین $L_i(x)$ از معادله $i \neq j$:

$x_0, x_1, \ldots, x_{l-1}, x_{l-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ می باشد. که یک چند جمله ای درجه n است و چون باید $L_i(x_i) = 1$ با قراردادن x_0 به جای x در عبارت اخیر باید داشته باشیم:

چندجمله ای لاگرانژ

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

با محاسبه $L_i(x)$ و استفاده از رابطه 2 یک چند جمله ای به دست می آید که در (1) صدق می کند و ثابت می‌شود این چند جمله ای منحصر به فرد است.

- مثال: چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به دست آورید و $f(-0.5)$ را تخمین بزنید.

x_i	-2	-1	0
f_i	3	1	1
	$i=0$	$i=1$	$i=2$

بین این نقاط

-0.5∈(-2,0)

$$P(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x+2)(x-0)}{(-1+2)(-1-0)} = \frac{x^2+x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+2)(x+0)}{(-1+2)(-1-0)} = \frac{x^2+3x}{2}+2$$

$$\Rightarrow P(x) = 3\left(\frac{x^2+x}{2}\right)+1\left[-(x^2+2x)\right]+1\times\frac{x^2+3x+2}{2}$$

$$= \frac{3x^2}{2}+\frac{3}{2}x-x^2-2x = \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1$$

$$P(x) = x^2+x+1$$

$$P(-0.5) = (-0.5)^2+(0.5)+1$$
$$= 0.75$$

ضمناً: $L_0(x)+L_1(x)+L_2(x)=1$

توجه: در حالت کلی نیز ثابت می‌شود:

$$\sum_{i=0}^{n} L_1(x)=1$$

- مثال: چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را پیدا کنید:

x_i	-2	-1	0	2
f_i	3	1	1	7

$$P(x) = f_0L_0(x)+f_1L_1(x)+f_2L_2(x)+f_3L_3(x)$$

$$L_0=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$
$$=\frac{x^2+x}{2}\times\frac{x-2}{-2-2}=\frac{x^3-x^2-2x}{-8}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=-(x^2+2x)\frac{x-2}{-1+2}=\frac{x^3-4x}{3}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{x^2+3x+2}{2}\times\frac{x-2}{0-2}$$
$$=\frac{x^3+x^2+10x-4}{-4}$$
$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{(x+2)(x+1)(x+0)}{(2+2)(2+1)(2-0)}=\frac{x^3+2x^2+2x}{24}$$
$$\Rightarrow P(x)=3\left(\frac{x^3-x^2-2x}{-8}\right)+1\left(\frac{x^3-4x}{3}\right)+1\left(\frac{x^3-4x}{3}\right)$$
$$+1\left(\frac{m^3+x^2-4x-4}{-4}\right)+7\left(\frac{x^3+2x^2+2x}{24}\right)$$

چون نقطه $\begin{vmatrix}2\\7\end{vmatrix}$ که در مثال ۲ داشتیم $P(x)=x^2+x+1$ نقطه ای بود که در چند جمله ای مثال (۱) صدق نمی کرد لذا چند جمله ای حاصل همان چند جمله مثال (۱) گردید و چند جمله ای درجه ۳ نشد.

توجه: همان طور که دیدیم با اضافه کردن یک نقطه به جدول شماره (۱) تقریباً همان عملیات را برای پیدا کردن $p(x)$ تکرار کردیم بعد روشی را ارائه می دهیم

که تنها با عملیات ساده تری درجه چند جمله ای درون یاب را تعیین می کنیم بلکه افزودن یک یا چند نقطه به جدول تابعی چند جمله ای جدید با استفاده از چند جمله ای قبلی محاسبه خواهد شد.

تمرین-

(۱) با استفاده از $Cos45^\circ = 0.7071, Cos0^\circ = 0.5$ یک چند جمله ای در جه یک پیدا کنید که از این نقاط بگذرد و با توجه به آن مقدار تقریبی $Cos0^\circ$ را بیابید سپس عدد پیدا شده را با مقدار واقعی $Cos50^\circ$ مقایسه کرده خطا را تعیین کنید.

(۲) با به کار بردن درون یابی برای تابع $y = \sqrt{x}$ در نقاط $x_0 = 1 \ , \ x_1 = 4$ تقریب هایی برای این تابع در $x = 3, x = 3$ به دست آورید.

روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن:

تعریف- فرض کنید $x_\circ, x_1 ..., x_n$ نقاطی متمایزند تفاضلات مرتبه اول در x_i و x_{i+1} چنین تعریف می‌شود.

$$f[x_i, x_{i+1}]\frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

تفاضلات مرتبه اول در x_0 و x_{i+1}

تفاضلات مرتبه n در نقاط $x_n, ..., x_1, x_0$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_0, ... x_{n-1}] - f[x_1, ..., x_n]}{x_0 - x_n}$$

می توان ثابت کرد که $f(x)=P(x)+R(x)$ به طوری که $P(x)$ یعنی چند جمله ای دورن یاب برابر است با:

$$P(x)=f_0+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$
$$+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_0,\ldots.,x_n]$$

- مثال ۱): چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن به دست آورید سپس نقطه ۷ و ۲ را به جدول اضافه کرده و چند جمله ای درون یاب آن را محاسبه کنید:

x_i	f_i	$f[x_\infty,x_{i+1}]$	$f[x_0,x_1,x_2]$
-2	3	$\frac{3-1}{-2-(-1)}=-2$	
-1	1	$\frac{3-1}{-2-(-1)}$	$\frac{-2-0}{-2-0}=-1$
0	1	$\frac{1-1}{-1-0}=0$	

$$f(x)=f_0+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x,x_1,x_2]$$

$$f(x)=3+(x+2)(-2)+(x+2)(x+1)=x^2=x+1 \qquad (1)$$

x_i	-2	-1	0	2
f_i	3	1	1	7

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x$	$f[x_0,x_1,x_2,$
-2	3			
-1	1	$\frac{3-1}{-2-(-1)}=-2$	$\frac{-2-0}{-2-0}=1$	
				$\frac{1-1}{-2-2}=0$
0	1	$\frac{1-1}{-1-0}=0$	$\frac{0-3}{-1-2}=1$	
2	7	$\frac{0-3}{-1-2}=3$		

$$P(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_2, x_3]$$

$$P(x) = 3 + (x + 2).(-2) + (x + 2)(x + 1)(1) + (x + 2)(x + 1)(x - 0) \times 0$$

$P(x) = x^2 + x + 1$ نقطه (2,7) در چند جمله ای قبل صدق میکند

خطای چند جمله ای درون یاب:

معمولاً درون یابی برای تقریب توابعی که کارهای عددی مانند مشتق گیری و انتگرال گیری روی آنها مشکل و غیر ممکن است استفاده می کنیم. برای این منظور تابع $f(x)$ را که $[a,b]$ تعریف شده در نظر می گیریم این تابع را به وسیله نقاط $x_0 = a$ و $x_1 + x_2 ..., x_n = b$ به n قسمت تقسیم می کنیم سپس از این $n+1$ نقطه متمایز یک چند جمله ای درجه n به نام $P_{n(x)}$ عبور می دهیم. $P_{n(x)}$ تقریبی است برای $f(x)$ چون کارهای عددی مانند مشتق گیری و انتگرال گیری بسیار ساده است. اگر بخواهیم مقدار خطای $P_{n(x)}$ $P_{n(x)}$ را نسبت به $f(x)$ پیدا کنیم، در خور نقاط درون یابی یعنی $x_0, x_1, ..., x_n$ واضح است که مقدار خطای ان در خود نقاط صفر است. زیرا هم $f(x)$ و هم $P_{n(x)}$ ا زاین نقاط می گذرد. اما اگر در نقطه ای غیر این نقاط بخواهیم $f(x)$ و هم $P_{n(x)}$ را پیدا کنیم جواب ما دارای خطاست. با استفاده از قضیه زیر این خطا را به دست می آوریم.

قضیه- فرض کنید تابع f بر $[x_0,x_n]$ تعریف شده است و $P_{n(x)}$ چند جمله ای منحصر به فرد حداکثر از درجه $P_{n(x)}$ باشد که از این نقاط می گذرد و $f_{(x)}^{f(n+1)}$ بر بازده فوق موجود باشد. در این صورت برای هر x در x_0,x_n داریم:

$$f(x)-P(x)=(x-x_0)....(x-x_n)\frac{f_{(c)}^{(n+1)}}{(n+1)!},\exists C\in(x_0,x_n)$$

در عمل چون پیدا کردن مقدار C مشکل است لذا اگر بتوان کران بالایی برای $\left|f_{(x)}^{(n+1)}\right|$ حساب کنیم، مثلاً $\left|f_{(x)}^{(n+1)}\right|\le M$ آن گاه داریم:

$$|f(x)-P(x)|\le\frac{|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)|M}{(n+1)!}$$

- مثال: با استفاده از درون یابی خطی (یعنی چند جمله ای درجه ۱) تابع $f(x)=\ln x$ را درون یابی کنید سپس مقدار $\ln 3.16$ را تعیین کرده حداکثر خطای آن را مشخص کنید. هرگاه بدانیم $\ln 3.1=1.1314$ و $\ln 3.2=1.632$ (به روش لانگرانژ)

x_i	3.1	3.2
f_i	1.1314	1.1632

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{x-3.2}{3.1-3.2}=\frac{x-3.2}{-0.1}=-10x+32=32-10x$$

$$L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{x-3.1}{3.2-3.1}=\frac{x-3.1}{0.1}=10x-32$$

$$P(x)=1.1314(32-10x)+1.1632x-36.0592$$

$$=0.1456+0.318x$$

$$P_{(3.16)}=0.1456+0.318(3.16)=1.15048\sim 1.15.5$$

$$\ln 3.16\sim 1.1505$$

$$f(x)=Lnx\sim P(x)=0.1456+0.318c$$

قضیه $\rightarrow f(x)-P_1(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}f''(c):C\in[3.1,3.2]$

$$x=3.16\rightarrow|f(3.16)-p(3.16)|=\left|\frac{(3.16-3.1)(3.16-3.2)}{2}\left(\frac{-1}{C^2}\right)\right|=$$

مقدار خطا: $\left|\dfrac{0.0024}{2}\left(\dfrac{1}{c^2}\right)\right|=\dfrac{0.0012}{C^2}:\leq c\leq 3.2$

این میزان خطا وقتی ماکزیمم است که $c=3.1$

این میزان خطا وقتی مینیمم است که $c=3.2$ (C مخرج کسر است)

$$\frac{0.0012}{(3.1)^2}=0.000124889$$

$$\frac{0.0012}{(3.1)^2}=0.000117187$$

مثال (۲)- چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را بـه روش نیـوتن بـه دست آوره سپس نقاط $(-2,-1),(-1,0)$ را به آن اضـافه کنیـد و مجـدداً $P(x)$ را بیابید.

(قسمت اول مساله قبلاً حل شده)

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_i+2]$	$f[x_i,\dots,x_i+3]$	$f[x_0,x_1,..x_4$
0	-1				
1	0	$\frac{-1-0}{0-1}=1$			
2	-3	$\frac{0-(-3)}{1-2}=-3$	$\frac{1-(-3)}{0-1}=-2$		
-1	0	$\frac{-3-0}{2-(-2)}=-1$	$\frac{-3-(-1)}{1-(-1)}=-1$	$\frac{-2-(-1)}{0-(-1)}=-1$	
-2	-1	$\frac{0+1}{-1-(-2)}=1$	$\frac{-1-1}{2-(-2)}=\frac{-1}{2}$	$\frac{-1-\left(\frac{-1}{2}\right)}{1-(-2)}=-\frac{1}{6}$	$\frac{-1-\left(\frac{-1}{6}\right)}{0-(-2)}=\frac{-5}{12}$

$$P(x) = -1 + (x-0)(1) + (x-0)(x-1)(-2) + (x-0)(x-1)(x-2)(-1)$$
$$+ (x-0)(x-1)(x-2)(x+1)\left(\frac{-5}{12}\right)$$

چند جمله ای درون یاب $P(x) = \frac{-5}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{6}x - 1$

تمرین-

۱) فرض کنید $f(x) = \sin\frac{\pi}{4}x$ و $x_i = i$ برای $i = 0,1,2$ یک کران بالا برای خطای چند جمله ای درون یاب f در نقاط فوق بیابید همچنین ابتدا چند جمله ای درون یاب f را به دست آورید. سپس $f = 1.5$ را تقریب زده و خطای ان را پیدا کنید.

۲) ثابت کنید مجموع چند جمله ای های لانگرانژ برابر است با ۱:

$$\sum_{i=9}^{n} L_1(x) = 1$$

تفاضلات متناهی یا درون یابی با استفاده از نقاط متساوی الفاصله:

هرگاه نقاط دورن یاب متساوی الفاصله باشند فرمول های ساده تری برای محاسبه چند جمله ای های درن یاب و تخمین $f(x)$ برای یک x غیر جدولی موجود

است هرگاه فاصله هر دو نقطه متوالی برابر با n باشد جدول قبل به فرم زیر ساده می‌شود:

x_i	f_0	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_i+2]$	$f[x_i, \ldots, x_i+3]$
x_0	F_0			
x_1	f_1	$\frac{1}{\mathrm{h}}(f_1 - f_0)$	$\frac{1}{h^2}(f_2 - 2f_1 + f_0)$	
x_2	f_3	$\frac{1}{h}(f_2 - f_1)$	$\frac{1}{h^2}(f_3 - 2f_2 + f_1)$	$\frac{1}{3!h^3}(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)$
x_3	f_3	$\frac{1}{h}(f_3 - f_2)$		

با استفاده از نماد گذاری می توانیم جدول فوق را به صورت زیر بنویسیم:

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_1$$

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{h-1} f_i)\Delta^{n-1}_{f_{i-1}} - \Delta^{n-1}_{f_i}$$

$$x_{i+1} - x_i = h \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

عملگر Δ را که به صورت بالا تعریف شده عملگر تفاضلات پیش رو می نامند.

در این صورت خواهیم داشت:

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta(f_0) = \Delta(f_1 - f_0) = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)$$
$$= f_2 - f_1 + f_0$$

$$\Delta^3 f_0 = \Delta(\Delta^2 f_0) = \Delta(f_2 - 2f_1 + f_0) = (f_3 - 2f_2 + f_1) -$$
$$(f_2 - 2f_1 + f_0) = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$$

قضیه- (ارتباط تفاضلات پیش رو و تفاضلات نیوتن): فرض کنید

$$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n] = \frac{1}{n!h^n}\Delta^n f_0$$

و چند جمله ای درون یاب تابع f به فرم زیر است.

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!h^n}\Delta^n f_0$$

و چند جمله ای درون یاب تابع f به فرم زیر است:

$$f(x) = f_0 + 0\Delta f_0 + \frac{0(0-1)}{2!}\Delta^n f_0$$

و چند جمله ای درون یاب تابع f به فرم زیر است:

$$P(x) = f_0 + 0\Delta f_0 + \frac{0(0-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{0(0-1)(0-2)\ldots(0-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

فرمول چند جمله ای درون یاب تفاضلات پیشرو و نیوتن

$$0 = \frac{x - x_0}{h}$$

از فرمول فوق وقتی استفاده می کنیم که بخواهیم $f(x)$ را در نقطه ای که مجاور نقاط ابتدای جدول است تخمین زنیم عملگر دیگری به نام عملگر تفاضلات پس رو با نماد ∇ (دیل) که به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$
$$\nabla^n f_i = \nabla(\nabla^{n-1} f_i) = \nabla^{n-1} f_i - \nabla^{n-1} f_{i-1}$$

قضیه فوق در این حالت به شکل زیر خواند بود.

قضیه- برای نقاط متساوی الفاصله $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ فرمول تفاضلات پسرو نیوتن به شکل زیر است:

$$P(n) = f_n + 0\nabla f_n + \frac{0(0+1)}{2!}\Delta^2 f_n + \ldots + \frac{0(0+1)(0+2)\ldots(0+n-1)}{n!}\nabla f$$

$$: 0\frac{x - x_n}{h}$$

توجه: از فرمول تفاضلات پسرو برای تخمین زدن $f(x)$ در نقاط مجاور انتهای جدول استفاده می‌شود.

ارتباط عملگر Δ, ∇ :

(1) $\Delta\nabla = \nabla\Delta$

(2) $\Delta f_i = \nabla f_{i+1}$

(3) $\Delta^n f_i = \nabla^k f_{i+k}$

- مثال: چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به کمک تفاضلات پیش رو به دست آورید:

x_i	-2	-1	0	1
f_i	3	1	1	3

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-2	3			
-1	1	1-3=-2	0-(-2)=2	2-2=0
0	1	1-1=0	2-0=2	
1	3	3-1=2		

تفاضلات پیش رو: $p(x)=3+0(-2)+\frac{0(0-1)}{2!}(2)+\frac{0(0-1)(0-2)}{3!}\times 0$

$$0=\frac{x-x_0}{n}=x-(-2)=x+2$$

$$P(x)=3-2(x+2)+(x+2)(x+1)$$

$$P(x)=3-2x-4+x^2+3x+2$$

$$P(x)=x^2+x+1$$

- مثال چند جمله درون یاب تابع جدولی زیر را بـه روش تفاضـلات پسـرو پیـدا کنید.

x_i	0	1	2	3
f_i	0	1	0	-3

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0	0			
1	1	1-1=0	0-(-2)=2	2-(-2)=0
2	0	0-1=	2-0=2	
3	-3	3-1=2		

$$P(x) = -3 + 0(-3) + \frac{0(0+1)}{2!}(-2) + \frac{0(0+1)(0+2)}{3!} \times 0$$

$$0 = \frac{x-3}{1} = x-3$$

$$P(x) = -3 - 3(x-3) - (x-3)(x-2) + 0$$

$$P(x) = -3 - 3x + +9 - x^2 - x^2 + 5x - 6$$

$$P(x) - x^2 + 2x$$

نکته- سوالی که مطرح می شود این است که محاسبه $p(x)$ به کدام روش مفیدتر است. جواب آن است که چون $\frac{x-x_i}{h}=0$ لذا x_i را چنان اختیار می کنیم که $|0|$ کمترین مقدار را داشته باشد (یعنی x_i را آن نقطه از جدول می گیریم که کمترین فاصله را تا x داشته باشد.)

- مثال: جدول زیر مربوط به $f(x)=\sin x$ است برای x های صفر درجه 10° و 20°، و … و 50° مطلوبست برآورد (تخمین) $Sin5^\circ$ با استفاده از چند جمله ای درون یاب.

x	0	10	20	30	40	50
f_i	0	0/1736	0/3420	0/5	0/6428	0/7660

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0	0			
10	0/1736	0/1736		
20	0/3420	0/1684	-0/0052	-0/0052
30	0/5	0/1580	-0/0104	
40	0/6428	0/1428	-0/0152	-0/0048
50	0/660	0/1232	-0/0196	-0/0044

$\Delta^5 f_i$

0/0004	0
0/0004	

$P(x)=\sin 5^{\circ}$

چون از ما چند جمله خواسته نشده پس می توانیم به طور مستقیم بنویسیم:

$p(5)$

$$0=\frac{x-x_0}{10}=\frac{5-0}{10}=\frac{1}{2}$$

$$f(5)=0+\frac{1}{2}(0/1736)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{21}(-0/0052)+$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1-2)\right)}{3!}(0/0052)+\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}(0/0004)+0=0/0871$$

- مثال: تابع $f(x)=Sinx$ را با استفاده از نقاط $0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}$ درون یابی کـرده و مقدار $\sin 37^{\circ}$ و $40'$ و $15''$ را برآورد کنید. (پیشرو)

-

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0	0			
$\frac{\pi}{6}$	0/5	0/5		
$\frac{\pi}{3}$	0/866025	0/366025	-0/133975	-0/098075
$\frac{\pi}{2}$	1	0/133975	-0/232050	

$$0=\frac{x}{\frac{\pi}{6}}=\frac{6x}{\pi}$$

$$P(x)=0+\frac{6x}{\pi}(0/5)+\frac{\frac{\pi}{6}\left(\frac{6x}{\pi}-1\right)}{2!}(-0/133975)+$$

$$\frac{\frac{66}{\pi}\left(\frac{6x}{\pi}-1\right)\left(\frac{6x}{\pi-20}\right)}{3!}-(0/098075)=$$

$$37^\circ,40',15''=37+\frac{40}{60}+\frac{15}{3600}=37+\frac{2}{3}+\frac{1}{240}$$

$$=\frac{8880+160+1}{240}=\frac{9041}{240}=37/680833^\circ$$

باید به رادیان تبدیل شود $\xrightarrow{\times\frac{\pi}{180}} 0/6574800\,Rad$

$$P(0/65748)=\frac{6(0/65748}{\pi}(0/5)+\frac{\frac{6(0/65748)}{\pi}\left(\frac{6(0/65748}{\pi}-1\right)}{2}$$

$$(-0/133975)+\frac{\left(\frac{6(0/65748}{\pi}\right)\left(\frac{6(0/65748)}{\pi}-1\right)\left(\frac{6(0/65748)}{\pi}-2\right)}{3!}$$

x_i	f_i	Δf_i
x_0	f_0	
x_1	f_1	Δf_0
x_2	f_2	Δf_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-2}	f_{n-2}	
x_{n-1}	f_{n-1}	Δf_{n-2}
x_n	f_n	Δf_{n-1}

x_i	f_i	Δf_i
x_0	f_0	
x_1	f_1	Δf_0
x_2	f_2	Δf_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-2}	f_{n-2}	
x_{n-1}	f_{n-1}	Δf_{n-1}
x_n	f_n	Δf_8

تمرین-

به کمک روش لانگرانژ محاسبه کنید:

۱) فرض کنید $f(x_0)=f_0$, $f(x_1)=f_1$ مطلوبست چند جمله ای درون یاب f و با استفاده از آن تخمینی از $f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$

۲) چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به دست آورده و با استفاده از $f\left(\frac{3}{2}\right), f\left(\frac{-1}{2}\right)$ را بیابید.

x_i	-1	0	1	2
f_1	-2	-1	0	7

جواب $P(x)=x^3-1$

۳) با استفاده از تفاضلات تقسیم شده نیوتن چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به دست آورده آیا با افزودن نقطه $(2,1)$ چند جمله ای درون یاب تغییر می‌کند.

x_i	-1	0	1
f_i	1	-1	-1

۴) درجه چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

(روش تفاضلات تقسیم شده)

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	3	2	7	24	59	118

راهنمایی: درجه چند جمله ای درون یاب بزرگترین مرتبه تفاضلات تقسیم شده مخالف صفر است.

۵) چند جمله ای درون یاب تابع $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$ را در نقاط $x_1=0, x_0=0$ یافتـــه و بـــرای $|f(x)-p(x)|$ کـــران بـــالایی بیابیـــد، ســـپس مقدار $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-p\left(\frac{1}{2}\right)\right|$ را با کران بالا در $x=\frac{1}{2}$ مقایسه کنید.

۶) تفاضـــلات متنـــاهی- فـــرض کنیـــد $g(x_i)=g_i\,, f(x_i)=f_i$ بـــرای 33 $i=0,1,\ldots,4$ و $x_i=x_0+ih$ ثابت کنید:

$$\Delta(\alpha f_i+\beta g_i)=\alpha\Delta f_i+\beta\Delta g_i$$

$$\Delta(f_i g_i)=f_i\Delta g_i+g_{i+1}\,\Delta f_i$$

$$\Delta\left(\frac{f_i}{g_i}\right)=\frac{g_i\Delta f_i-f_i\Delta g_i}{g_i\,g_{i+1}}$$

۷) با استفاده از روش تفاضلات پیشرو چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیـر را بیابید.

x_i	1	2	3	4
f_i	2	5	10	17

جواب: $p(x)=x^2+1$

محاسبه خطا

جواب بسیاری از مسائل عددی به وسیله عملیات حسابی تکراری به دست می آید و خطاهای کوچک حاصل از داده ها در طی این عملیات انتشار پیدا می‌کند. به طوری که جواب مورد نظر ممکن است قابل قبول به نظر نرسد بنابراین باید با شیوه های مناسب از تکثیر آن جلوگیری نماییم.

خطاها به طور کلی به دو دسته تقسیم می شود:

خطاهای ذاتی، که با ناشی از فرمول های ریاضی و شرایط فیزیکی مساله است که در بسیار از کاربردهای ریاضی شرایط به صور ایده آل در نظر گرفته می شود.

خطاهای محاسباتی خود به دو دسته تقسیم می شود:

۱) خطاهای حاصل از گرد کردن

۲) خطاهای برشی

گرد کردن:

برای گرد کردن یک عدد تا n رقم اعشار به صورت زیر عمل می کنیم:

ابتدا همه ارقام سمت راست رقم n ام را حذف می کنیم اگر رقم n+1 دقیقاً 5 باشد، در صورتی که رقم n ام فرد باشد یک واحد به رقم n ام اضافه می شود اگر رقم n ام زوج باشد، عدد به قوت خود باقی است.

به مثالهای زیر توجه کنید:

$\sqrt{17}\times\sqrt{5}$; 10^{-3}

$\sqrt{5}=2.23605\ldots \simeq 2.236 \rightarrow 0.5\times10^{-3}$

$\sqrt{17}=4.12310\ldots \simeq 4.123 \rightarrow 0.5\times10^{-3}$

$\sqrt{5}\times\sqrt{17}\simeq 9.219$

$E_{ab}\le \bar{a}E_b+\bar{b}E_a \rightarrow 2.36\times0.5\times10^{-3}+4.123\times0.5$

$0.5\times10^{-3}(2.236+4.123)$

$E_{ab}\le 0.5\times10^{-3}\times+6.359$

گردکرد $E\le 0.5\times10^{-3}$

$\le 0.5\times10^{-3}+0.5\times10^{-3}$

$\le 0.5\times10^{-3}(1+6.359)\rightarrow 0.5\times10^{-3}\times7.359$

$9.219-0.5\times10^{-3}\times7.359\le\sqrt{5}\times\sqrt{17}\le 9.219+0.5\times10^{-3}\times7.359$

قضیه تیلور: $f(x)=f(a)+f'(a)(x+a)+f''(\frac{a}{2!})(x-a)^2$

بسط مک لورن: $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots.$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$

همچنین فرض کنید دو دروازه بان یکی از ۵ پنالتی ۴ گل مـی خـورد و دیگـری از ۱۰ پنالتی ۴ گل می زند. اینجاست که خطای نسببی این تفاوت را نشان می دهد.

عملیات جبری روی خطاها

۱- خطای جمع: فرض کنید:

$$\left.\begin{array}{l} a=\bar{a}+E_a \\ b=\bar{b}+E_b \end{array}\right\} \begin{array}{r} a+b=\bar{a}+\bar{b}+E_a+E_b \\ a+b=\bar{a}+\bar{b}+E_{a+b} \end{array} \rightarrow E_{ab}\leq ?$$

$$\begin{aligned} E_{a+b} &= |(a+b)-(\bar{a}+\bar{b})| \\ &= |(a-\bar{a})+(b-\bar{b})| \leq |a-\bar{a}|+|b-\bar{b}| \\ &= E_a+E_b \Rightarrow E_a+E_b \leq E_{a+b} \end{aligned}$$

۲- خطای تفاضل:

$$E_{a-b}\leq E_a-E_b$$

۳-خطای حاصلضرب:

$$E_{a.b}\leq \bar{a}E_b+\bar{b}E_a$$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} a=\bar{a}+E_a \\ b=\bar{b}+E_a \end{array}\right\} a.b=(\bar{a}+E_a).(\bar{b}+E_b)=\bar{a}\,\bar{b}+\bar{b}E_b+bE_a$$

$$=|ab-\bar{a}\,\bar{b}|=|\bar{a}E_b+\bar{b}E_a|$$

مثال عددی:

$$\sqrt{2}=1.142 \qquad \sqrt{2}\simeq 1.41$$

$$\sqrt{3}=1.7320 \qquad \sqrt{3}\simeq 1.73$$

$$\sqrt{3}+\sqrt{2}=1.41+1.73=3.14$$

$$E_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=E_{\sqrt{2}}+E_{\sqrt{3}}$$

$$=0.5\times 10^{-2}\times 0.5\times 10^{-2}=10^{-2}$$

$$E\leq 10^{-2}$$

$$3.14-0.01 \leq \sqrt{2}+\sqrt{3} \leq 3.14+1.01$$
$$3.13 \leq 3.15$$

خطای حاصلضرب:

$$E_{abc} \leq \bar{a}\bar{b}E_c + \bar{a}\bar{c}E_b + \bar{b}\bar{c}E_a$$
$$abc \simeq +\bar{a}\bar{b}c + E_{abc}$$

$$E_{ab} = |ab - \bar{a}\bar{b}| = |ab - \bar{c}\bar{b} + \bar{a}b - \bar{a}b|$$
$$= |(b(a-\bar{a}) + \bar{a}(b-\bar{b})$$
$$\leq |b-\bar{a}| + \bar{a}|b-\bar{b}|$$

از طرفی: $= bE_a + \bar{a}E_b$

$$< (\bar{b}+E_b).E_a + \bar{a}E_b$$
$$= \bar{b}E_a + E_b.E_a + \bar{a}.E_b$$
$$= E_{ab} \leq \bar{a}E_b + \bar{b}E_a$$

$$b-\bar{b} \leq |b-\bar{b}| = E_b$$
$$b \leq \bar{b} + E_b$$

خطای تقسیم:

$$E_{\frac{a}{b}} \leq \frac{\bar{a}E_b + \bar{b}E_a}{\bar{b}^2}$$

اثبات: $\begin{matrix} a = \bar{a}+E_a \\ b = \bar{b}+E_b \end{matrix} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\bar{a}+E_a}{\bar{b}+E_b} = \frac{\bar{a}(1+\frac{E_a}{a})}{\bar{b}(1+\frac{E_b}{b})}$

$$=\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(1-\frac{E_a}{\bar{a}})\times\frac{1}{1+\frac{E_b}{\bar{b}}}$$

$$=\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(1+\frac{\bar{E}}{\bar{a}})(1-\frac{E_b}{b}+(\frac{Eb^2}{2})-(\frac{Eb}{b})^3+\ldots$$

$$=\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(1+\frac{E_a}{a})(1-\frac{\bar{E}b}{\bar{b}})$$

$$=\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(1-\frac{E_b}{\bar{b}}-\frac{\bar{E}_a}{\bar{b}}\times\frac{E_b}{\bar{b}})$$

$$=\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\ldots\frac{aE_b}{\bar{b}^2}+\frac{E_a}{\bar{b}}$$

$$=\frac{a}{b}-\frac{-\bar{a}E_b+\bar{b}E_a}{\bar{b}^2}$$

$$=|\frac{a}{b}-\frac{\bar{a}}{b}|=|\frac{-\bar{a}E_b+\bar{b}E_a}{\bar{b}^2}| \qquad \le\frac{\bar{a}E_b+\bar{b}E_a}{\bar{b}^2}$$

- مثال مقدار تقریبی $\sqrt{5}$ و $\sqrt{17}$ را به سه رقم اعشار گرد کردن یافته و حاصل $\sqrt{5}\times\sqrt{17}$ را بیابید و ماکزیمم خطای آن را حساب کنید:

$$\sqrt{5}=2/23606\ldots. \qquad \sqrt{5}\simeq 2/236 \qquad E_{\sqrt{5}}\le 0/5\times10^{-3}$$

$$\sqrt{17}=4/1230\ldots. \qquad \sqrt{17}\simeq 4/123 \qquad E_{\sqrt{17}}\le 0/5\times10^{-3}$$

$$\sqrt{5}\times\sqrt{17}=2/236\times14/123=9.219028=9.219$$

گردکردن $E\le E_{ab}$

$$E_{ab} \le \bar{a}E_b + \bar{b}E_a = 2/236\times 0/5\times 10^{-3} + 4/123\times 0/5\times 10^{-3}$$
$$= 0/5\times 10^{-3}(2/236+4/12.3)$$
$$E_{ab} \le 0/5\times 10^{-3}\times 7/359 \qquad (1)$$

گردکردن $\qquad E \le 0/5\times 10^{-3} \quad (2)$

$$(1)\times(2) \Rightarrow E \le 0/5\times 10^{-3}\times 6/359 + 0/5\times 10^{-3}$$
$$E \le 0/5\times 10^{-3}\times 7/359$$
$$9/219 - 0/5\times 10^{-3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{17} \le 9.223$$
$$9/215 \le \sqrt{5}\times\sqrt{17} \le 0.923$$

- معمولاً در عمل تقسیم به گونه ای عمل می کنند که منجر به عمل ضرب گردد

مثلاً برای محاسبه $\frac{\pi}{2\sqrt{7}}$:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{7}} = \frac{n\times\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \frac{1}{14}\times\pi\times\sqrt{7}$$

تمرین- مطلوبست محاسبه $\frac{\pi}{\sqrt{15}}$ و محاسبه حداکثر خطای آن (تا سه رقم اعشار گردکنید)

نکته ۱) از ضرب کردن اعداد تقریببی بزرگ پرهیز کنید زیرا خطای آن خیلی زیاد می شود.چون: $E_{ab} \le \bar{a}\,E_b + \bar{b}E_a$

نکته ۲) از تفریق اعداد تقریبی نزدیک به هم بپرهیزید، زیرا:

چون اعداد تقریبی رو $E_{a-b} = \frac{E_{a-b}}{a-b}$

به ∞ می رود. $\underset{\to 0}{a-b}$

مطلوبست محاسبه $(\sqrt{2}-1)^3$:

راه حل اول: $(\sqrt{2}-1)^3=(1/41-1)^3=(0/41)^3=0/068921$

راه حل دوم: $(\sqrt{2}-1)^3=(\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{2-1})^3=(\frac{2-1}{\sqrt{2}+1})^3$

$$(\frac{1}{1/41+1})^3=(\frac{1}{2/41})^3=(0.414937759)^3$$
$$=0.711421719$$
$$\simeq 0.07$$

حساب ممیز سیار: اعداد در کامپیوتر به صورت ممیز سیار ذخیره می شود منظور

از اعداد به صورت ممیز سیار اعشاری نرمال شده فرم:

$0/d1d2...d_m\times 10^n$ به طوری که $n\in Z$ و $d_1\neq 0$ و $d_i=0,1,2,....,9$ و

$i\geq 2$

مثلاً: $\frac{-5}{8}=-0/625\times 10^{-3}$

$720=0/720\times 10^{-3}$

حساب ممیز سیار

جمع و تفریق: ابتدا کوچکتر را نمایش را افزایش داده تا هر دو نمای مساوی پیدا کند،سپس جمع یا تفریق را انجام داده و حاصل را به صورت ممیز سیار می نویسد. (در صورت لزوم گرد می کنیم).

ضرب: نماها را با هم جمع و آن گاه مانتیس ها را در هم ضرب می کنیم، سپس نتیجه را به فرم ممیز سیار نوشته و گرد می کنیم.

تقسیم: ابتدا نماها را از هم کم کرده مانتیسها را بر هم تقسیم می کنیم، سپس نتیجه را به فرم ممیز سیار نوشته و گرد می کنیم.

- مثال: حاصل جمع زیر را به صورت ممیز بسیار بیابید:

$$\begin{aligned}&21/4534+5782/385\\&=0/214534\times10^{-2}+0/5782384^{5}\times10^{4}\\&=0/00214534\times10^{4}+0/5782384\times10^{4}\\&=0/580214534\times10^{4}\end{aligned}$$

- حاصلضرب زیر را به فرم ممیز سیار حساب کنید و تا سه رقم گرد نمائید:

$$\begin{aligned}&(0.427\times10^{+3})\times(0/368\times10^{2})\\&=0/157136\times10^{3})\times(-0/368\times10^{2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(0/273\times10^{-3})\times(-0/364\times10^{-1})&=-0/099372\times10^{2}\\&=-0/99372\times10^{1}\\&=-0/994\times10^{1}\end{aligned}$$

حاصل تقسیم زیر را در حساب شناور پیدا کنید و تا سه رقم اعشار گرد کنید:

$$\begin{aligned}\frac{0/543\times10^{2}}{0/455\times10^{3}}&=1/193406\times10^{0}\\&=0/1193406\times10^{0}=0/119\times10^{0}\end{aligned}$$

تمرین: حاصل عبارت زیر را در حساب ممیز سیار به دست آورید (سه رقم اعشار)

$$\frac{0/6118\times10^{-2}+0/184\times10^{0}}{(0/427\times10^{2})\times(0/368\times10^{-2})}$$

قضیه خطای نسبی:

فرض کنید $\bar{a}$ و $\bar{b}$ تقریبهایی از a و b بوده و این اعداد مثبت باشند د راین صورت داریم:

$$1)\ \tilde{E}_{a+b}\le Max\{\tilde{E}_a\ ,\ \tilde{E}_b\}$$

$$2)\ \tilde{E}_{ab}\le \tilde{E}_a+\tilde{E}_b$$

اثبات: $\tilde{E}_{a+b}=\dfrac{E_{a+b}}{a+b}\le\dfrac{E_a+E_b}{a+b}=\dfrac{E_a}{a+b}+\dfrac{E_b}{a+b}$

$$=\frac{E_a}{a}\times\frac{a}{a+b}+\frac{E_b}{b}\times\frac{E_b}{a+b}$$

$$0=\tilde{E}_a\frac{a}{a+b}+\tilde{E}_b\times\frac{b}{a+b}$$

$$\le Max\{\tilde{E}_a\,,\,\tilde{E}_b\}.\frac{a}{a+b}+Max\{\tilde{E}_b\,,\,\tilde{E}_a\}\times\frac{b}{a+b}$$

$$=Max\{\tilde{E}_a\,,\,\tilde{E}_b\}.(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b})$$

$$=Max\{\tilde{E}_a\,,\,\tilde{E}_b\}$$

اثبات 2:

$$\tilde{E}_{a.b}=\frac{E_{ab}}{\bar{a}\bar{b}}\le\frac{\bar{a}E_b+\bar{b}E_a}{\bar{a}\bar{b}}=\frac{\bar{a}Eb}{\bar{a}\bar{b}}+\frac{\bar{b}E_a}{\bar{a}\bar{b}}=\frac{Eb}{\bar{b}}+\frac{E_a}{\bar{a}}=\tilde{E}_b+\tilde{E}_a$$

تمرین:

۱- اعداد $\sqrt{7}$ و $\sqrt{19}$ را تا سه رقم اعشار گرد آورده و $\sqrt{7}\pm\sqrt{19}$ را با حداکثر خطای آن محاسبه کنید.

۲- مطلوبست محاسبه $\sqrt{2}\times\sqrt{11}$ را با حداکثر خطا.(تا ۴ رقم اعشار محاسبات ۱ انجام دهید).

۳- e . π و $\sqrt{5}$ را تا ۴ رقم اعشار گرد کرده حاصل $\pi.e.\sqrt{5}$, e^{π} را بیابید. با خطا مرتکب شده.

۴- اعـــــداد ۷۵/۶۱ و ۲۵/۵۴ و ۳/۷۱۲ و ۱/۵۴۳ و ۰/۵۱۱۲ و ۰/۱۰۰۱ . ۲۲۵/۰ و ۳۲۷/۶ و ۹۹۱/۷را به سه طریق زیر جمع کنید:

الف- اعداد از کوچک به فرم الف جمع کنید و حاصل را تا ۴ رقم با معنی گرد کنید. سپس نتیجه را با عدد سوم جمع کنید و حاصل را تا ۴ رقم با معنی گرد کنید و ..

ب- اعداد را از بزرگ به کوچک به فرم الف گرد کنید.

ج- حاصل جمع دقیق اعداد را بدون گرد کردن بیابید.

آیا جواب ها متفاوتند:کدام جواب از الف وب دقیق تر است چه نتیجه ای می گیرید:

۵- فرض کنید $(n\geq 1)$ $I_n=\int_0^1 x^n.e^{x-1}$ ثابت کنید:

الف- $n\geq 2$ $I_n>0$, $I_n=1-nI_{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$

ب. با استفاده از قسمت الف و محاسبه I_1 با چهار رقم اعشار I_9 را بیابید.

ج- با استفاده از $I_{n-1} = \frac{-I_n + 1}{n}$ و $n \geq 2$ و $I_{16} = 0$ مقدار I_9 را مجدداً به دست آورید.

۶-در معادله $ax^2 + 2bx + c = 0$ می دانیم : $b^2 >> a$. ریضه های معادله را چطور حساب می کنیم تا خطای جوابها به حداقل برسد مثلاً برای $b = 1,\ a = c = 10^{-5}$ و جوابهای معادله را بیابید. (بگوئید کدام دقیق تر است)

۷- با استفاده از حساب ممیزسیار حاصل $0/518 \times 10^3 + 0/437 \times 10^0$ را به دست آورید.

۸- اگر $a = 0/3 \times 10^1$ حاصل $a \times \frac{1}{5}$ را به دست آورید. (حساب ممیزسیار)

۹-اگر $a = 0/631 \times 10^2$ و $b = 0/434 \times 10^1$ و $c = 0/247 \times 10^0$ آیا $(a + b) + c = a + (b + c)$. (حساب ممیز سیار)

۱۰- تحقیق کنید: $a(b - c) \underset{=}{?} ab - ac$ هرگاه $a = 0/6842 \times 10^0$ و $b = 0/5685 \times 10^2$ و $c = 0/5641 \pm \times 10^2$ (محاسبات با ۴ رقم اعشار)

تست:

۱- کدام یک جز منابع خطا نیست؟ ۱- خطای داده ها ۲) خطای روش ۳)خطای برش ۴)خطای مدل

۲-برای محاسبه تقریبی $(\sqrt{2}-1)^4$ کدام عبارت تقریب دقیقتری می دهد؟

$1)(\sqrt{2}-1)^2$ $\quad 2)\ \frac{1}{17+12\sqrt{2}}$ $\quad 3)17-12\sqrt{3}$ $\quad 4)\ \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^4}$

۳-برای محاسبه تقریبی $\frac{1}{(\sqrt{2}-1)}$ کدام عبارت تقریب دقیقتری می دهد؟

$1)\ (\sqrt{2}+1)^4$ $\quad 2)\ \frac{1}{99+70\sqrt{2}}$ $\quad 3)(\sqrt{2}-1)^6$ $\quad 4)\ \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^4}$

۴-اگر $\bar{a}=1/5$ و $a=1/55$ خطای نسبی a کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ $\quad 1)\ \frac{1}{3}$ $\quad 3)\frac{1}{31}$ $\quad 4)\ \frac{10}{31}$

۶- اگر $y=\frac{ab}{c}$ آنگاه:

$1)\ \tilde{E}_y \le \tilde{E}_a+\tilde{E}_b+\tilde{E}_c$ $\quad 2)\tilde{E}_y \le \frac{\tilde{E}_a.\tilde{E}_b}{\tilde{E}_c}$

$3)\ \tilde{E}_y \le \tilde{E}_a+\tilde{E}_b+\tilde{E}_c$ $\quad 3)\ \tilde{E}_c \le \tilde{E}_a+\tilde{E}_b+\tilde{E}_y$

خطای محاسبه سری ها:

قضیه تیلور- فرض کنید تابع f در نقطه a دارای مشتقات پیوسته تا مرتبه n+1 باشد، در این صورت بسط تیلور f در نقطه a به صورت زیر است:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+....+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n$$

باقیمانده: $R_n = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}.(n-a)^{n+1} \qquad ,\exists c \in (a,x)$

بسط‌مک لورن:

$$: a = f(x) = f(x) = f(0) + f(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)x^n}{n!} + R_n$$

$$R_n = \frac{f_{(c)}^{(n+1)}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad , \qquad \exists \subset \in (a,x)$$

بسط مک لورن چند تابع به فرم زیر است:

$$Sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$Sinhx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$Cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

$$Coshx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$en(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$Arctgx = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

از بسط های فوق در محاسبات تقریبی استفاده می کنیم. برای محاسبه تقریبی $f(x)$ با خطای مطلق کمتر از هستند. جملات بسط را تا جایی می نویسیم که آخرین جمله کمتر از $\frac{}{2}$ باشد. (پس این جمله را نیز به جملات قبلی اضافه می کنیم).

-مثال: برای محاسبه $e^{./5}$ خطای کمتر از 10^{-5} چند جمله کافی است. در بسط بنویسید:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{0/1} = 1 + 0/1 + \frac{(0/1)^3}{3!} + \frac{(0/1)^3}{3!} + \frac{(0/1)^4}{4!} + \frac{(0/1)^5}{5!} + \dots$$

امتحان می کنیم: $\frac{(0/1)^3}{3!} = \frac{0/001}{6} = 0/000166 < 0/000005$

$$\frac{(0/1)^3}{4!} = \frac{0/0001}{24} = 0/0000041 < 0/000005$$

پس: $e^{0/1} = 1 + 0/1 + \frac{(0/1)^2}{2!} + \frac{(0/1)^3}{3!} + \frac{(0/1)^4}{}$

پس در محاسبه $e^{0/1}$ با تقریب کمتر از 10^{-5} باید اعداد را تا 6 رقم گرد کنیم:

$$\simeq 1 + 0/1 + 0/005 + 0/000167 + 0/000004 =$$

$$e^{0/1} = 1/105171 \qquad 10^{-5}$$

$$\varepsilon \; 10^{-2} \qquad Sin\frac{\pi}{11}$$

مثال: ترقیبی از $e^{\frac{2}{3}}$ با خطای کمتر از $\qquad \ln(\frac{5}{3}) \qquad \varepsilon \; 10^{-2}$

$$\varepsilon \; 10^{-2} \qquad Arctg\frac{\pi}{11}$$

فصل دوم

حل عددی معادلات $f(x)=0$:

برای تعیین تعداد و حدود ریشه های یک معادله در حالت کلی $f(x)=0$ روش های زیر را داریم:

۱- روش دوم منحنی: در این روش نمودار $y=f(x)$ را در صورت امکان رسم کرده نقاط برخورد یک این نمودار با نمودار محور x ها ریشه های این معادله است:

$$\begin{aligned} &f(x)=0 \\ &f(c_1)=0 \quad x=c_1 \\ &f(c_2)=0 \quad x=c_2 \\ &f(c_3)=0 \quad x=c_3 \end{aligned}$$

جوابهای معادله $f(x)=0$

مثال: ریشه های معادله $x-2\sin x=\theta$ را تعیین کنید:

توجه: در این معادله بالا را به فرم $f(x_1)=f_2(x)$ می توان نوشت و در این حالت کافی است منحنی های $\begin{matrix} y_1=f_1(x) \\ y_2=f_2(x) \end{matrix}$ را رسم کرده و x هایی که به ازا آنها $y_1=y_2$ می باشد جوابهای معادله است (در حقیقت طول نقاط برخورد دو نموئدار y_1 و y_2 جوابهای معادله $f_1(x)=f_2(x)$ است).

$$x=2\sin x$$

$$y_1=y_2$$

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = 2\sin x \end{cases}$$

تعداد ریشه: 3

$$x = 0$$
$$x_1 \simeq 2$$
$$x_2 \simeq -2$$

توجه: هر گاه تابع در دو طرف ریشه ها تعیین علامت دهند:

اگر $f(x) = 0$, $f(x) = (x-\alpha)^m .h(\alpha) = 0$ در این صورت اگر m فرد باشد، f در دو طرف α تغییر علامت می دهد و برعکس اگر f دو طرف α تغییر علامت دهدآن گاه x فرد است.

به عبارت دیگر این روش تعداد و حدود آن ریشه هایی را تعیین می کند که مرتبه تکرار آنها فرد است.

قضیه- اگر تابع f پیوسته و $f:[a,b]$ و $f(a).f(b)<0$ آن گاه عددی مانند c بین a و b وجود دارد به طوری که $f(c)=0$ (به علاوه اگر f اکیداً صعودی یا نزولی است، c منحصر به فرد است)

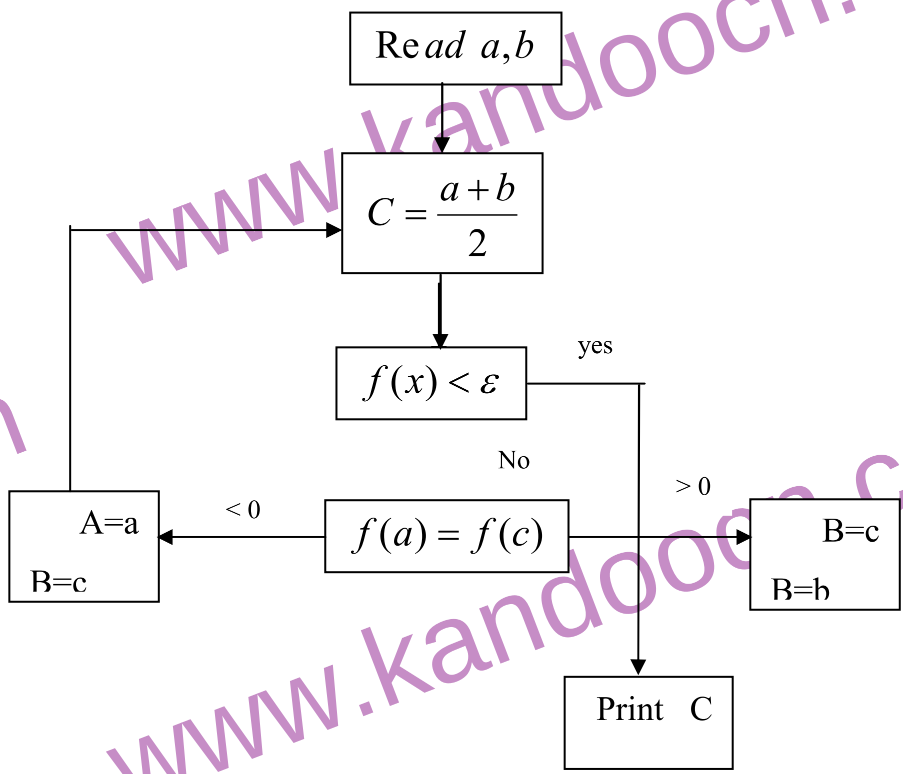
$$\left.\begin{array}{l} f:[a,b] \text{ پیوسته} \\ f(a).f(b)<0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \exists \subset \varepsilon(a,b): f(c)=0 \\ f(c)=0 \end{array}$$

تمرین- تعداد و حدود ریشه های معادلات زیر را به کمک روش ترسیم پیدا کنید:

$$x = 1\cos x$$
$$x + 1\cos x = xSinx$$
$$3^x = 4x^2 = 0$$

۲- روش دو بخشی یا تنصیف: در حالت کلی در کلیه حالات بعد فرض بر این است که $f[a,b]$, $f(a)f(b)<0$ و برای هر x بین a و b و $f'(x)<0$ یا $f'(x)>0$ اکیداً صعودی یا نزولی در این صورت معادله $f(x)=0$ دقیقاً یک ریشه بین 0 و b خواهد داشت.

ابتدا $C=\frac{a+b}{2}$ را به دست می آوریم تا فاصله [a,b] به دو بخش $[a,c]$ و $[a,b]$ تقسیم شود. سپس $f(c)$ را با $f(a)$ مقایسه می کنیم. اگر هم علامت باشند آن گاه ریشه معادله در $[a,b]$ واقع است. در این صورت a را با c عوض می کنیم. اگر هم علامت نباشند، آن گاه ریشه در a و c واقع است و b را با c عوض می کنیم و به همین ترتیب نصف کردن را تکرار می کنیم:



- یک ریشه معادله $x - \frac{1}{2}\cos x = 0$ با تقریب کمتر از $\varepsilon = 0.001$ را به کمک روش دو بخشی بیابید.

- $f(x) = x - \frac{1}{2}\cos x$

$a = 0 \rightarrow f(0) = 0 - \frac{1}{2}\cos 0 = \frac{-1}{2} < 0$

$b = 1 \rightarrow f(1) = 1 - \frac{1}{2}\cos 1 = 1 - \frac{1}{2} \times 0/540302 > 0$

$f : [0,1]$ پیوسته (2) $\qquad = 1 - \frac{1}{2} \times 0/5403 > 0$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}Sinx > 0 \rightarrow [0,1]$ (3)

f اکیداً صعودی

$1 , 2 , 3 =$ معادله فوق دقیقاً یک ریشه بین 0,1 دارد.

چون تقریب کمتر $0/001$ است تا 4 رقم اعشار گرد می کنیم.

یافتن ریشه بین 0 و 1 به کمک روش تنصیف:

a	b	c	f(c)
0	1	0/5	0/0612>0
0	0/5	0/25	0/2345
0/25	0/5	0/375	0/0903
0/375	0/5	0/4375	-0/0154
0/4375	0/5	0/4608	0/0227
0/227	0/4608	0/4531	0/0036

0/4375	0/4531	0/4453	-0/0059
0/4453	0/4492	0/4512	0/0012
0/4492	0/4512	0/4502	0/0000

C=0/4502

$$f(0/5)=0/5-\frac{1}{2}\cos 0/5=0/00612$$

$$f(0/25)=0/25-\frac{1}{2}\cos 0/25=-0/2345$$

$$f(0/375)=0/375-\frac{1}{2}\cos 0/00903$$

تمرین- ریشه های معادله $\cos x-x=0$ با تقریب $\varepsilon=0/001$

$$f(0)=1-0=1<0$$
$$f(1)=-0.4597>0$$

ویژگی های روش دو بخشی:

۱- روش دو بخشی همگراست. (سوق به سمت ریشه)

۲- همگرایی این روش خیلی کند و وقتگیر است به طوری که در هر ۱۰ بار تکرار سه رقم به ارقام c_n ها افزوده می‌شود.

برای اینکه تا چند مرحله پیش برویم تا خطای مطلق c_n کمتر از ε باشد یعنی $|C_n-\alpha|<\varepsilon$ با توجه به اینکه $|c_n-\alpha|<\frac{b-a}{2^n}$ کافی است $\frac{b-a}{2^n}<n$ در واقع n کوچکترین (اولین) عدد طبیعی است $\log_2\frac{b-a}{\varepsilon}<n$ که در فاصله فوق صدق می کند.

معیارهای توقف:

1) $|f(c_n)| < \varepsilon$
2) $|C_n - C_{n-1}| < \varepsilon$

- مثال: پس از چند بار تکرار ریشه معادله $x^2 + x - 1 = 0$ که در $[0,1]$ پیوسته است، با تقریب کمتر از $0/01_{10^{-2}}$ به روش تنصیف قابل محاسبه است؟

$$f(x) = x^2 + x - 1$$
$$f(0) = -1 < 0 \qquad (1)$$
$$f(1) = 1 > 0$$

(2) پیوسته $f[0,1]$

(3) $f'(x) = 2x + 1 > 0 : [0,1]$

معادله فوق یک ریشه بین صفر و یک دارد:

$$\frac{b-c}{2^n} < \varepsilon \rightarrow \frac{6}{2^n} < \varepsilon \frac{1-0}{2^n} < \varepsilon$$
$$\frac{1}{\varepsilon} < 2^n$$
$$\log_2^{\frac{1}{\varepsilon}} < n \rightarrow \log_2^{100} < n$$
$$\frac{\log^{100}}{\log^2} < n$$
$$6.64 < n$$
$$n = 7$$

تمرین- به کمک روش دو بخشی تقریبی ریشه معادلات زیر را بیابید هرگاه:

الف) $x - 0/2Sinx - 0/5 = 0 \quad 0 = 0/5,\ b = 1,\ \varepsilon = 10^{-3}$

ب) $x-2^{-x}=0 \qquad a=0, b=1, \varepsilon=10^{-5}$

ج) $e^{x}-x^{2}-3x-2=0 \qquad a=0, b=1, \varepsilon=10^{-5}$

پس از چند بار تکرار به ریشه تقریبی معادلات زیر می نویسیم:

$$x^3+x-1=0 \qquad a=0, b=1, \varepsilon=10^{-2}$$

$$Sinx-\frac{x}{2}=0 \qquad a=1, b=2, \varepsilon=10^{-2}$$

روش وتری (جابجائی):

پس از آزمون سه محدودیت ذکر شده در ابتدای این فصل: این روش مشابه به روش دو بخش است، با این تفاوت که در فلوچارت روش دو بخشی به جای

$c=\frac{a+b}{2}$ چنین قرار می دهیم $c=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

معیار توقف: عیناً معیار توقف در روش دو بخشی است.

توجه- معمولاً این روش سریعتر از روش دو بخشی است.

- مثال: با استفاده از روش جابجائی یا وتری معادله $x^3+x-1=0$ را با تقریب $\varepsilon=0/001$ بیابید:

$f(x)=x^3+x-1$ $\quad f:[0,1]$ پیوسته $\quad$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1<0 \\ f(1)=1>0 \end{array}\right\}(1) \qquad f'(x)=3x^2+1>0:[0,1]\ \ (3)$$

$$C=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

A	B	$C=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	F(c)
0	1	0/5	-0/375
0/5	1	0/6364	-0/1059
0/6364	1	0/6712	-0/0264
0/6712	1	0/6797	-0/00064
0/6797	1	0/6817	-0/0015
0/66817	1	0/6822	-0/0004$\to \lvert -0/0004 \rvert$ $=0/0004<0/001$ $C=0/6822\simeq 0/682$

تمرین- (۱) تقریبی از ریشه های معادلات زیر را به روش وتری بیابید:

1) $\quad x+\cos x \qquad \varepsilon=10^{-2}$

2) $\quad x^2-2^x=0 \qquad \varepsilon=10^{-2}$

3) $\quad 3xe^e=1 \qquad a=0/25 \quad b=0/75 \quad \varepsilon=10^{-2}$

$\Rightarrow 3x-e^x=0$

4) $\quad 2\sin x+x-2=0 \qquad a=0/6 \quad b=0/8 \quad \varepsilon=10^{-3}$

تمرین- (۲) نمودار جریان روش وتری را در حالتی که شرط توقف $|c_n - c_{n-1}| < \varepsilon$ باشد رسم کنید.

تکرار ساده (نقطه ثابت):

در این روش پس از بررسی سه محدودیت ذکر شده در ابتدای فصل معادله $f(x)=0$ را به فرم $x=g(n)$ در می آوریم. و پس از انتخاب $g(n)$ مناسب دنباله $x_n = g\binom{x}{n-1}$ دنباله این ما را به ریشه ها هدایت می کند (با انتخاب یک

x_0 تقریبی بین a و b)

برای تشخیص $g(x)$ مناسب قضیه زیر را داریم:

قضیه- اگر g تابعی بر $[a,b]$ باشد (یعنی $a \le x \le b$ و $a \le g(n) \le b$ باشد و برای هر x از $\varepsilon[a,b]$ داشته باشیم:

$|g'(x)| \le L < 1$ ، در این صورت:

۱) معادله $x=g(x)$ تنها یک ریشه بین a و b دارد.

۲) برای هر x_0 بین a,b دنباله $x_n = g\binom{n}{n-1}$ به تنها ریشه حقیقی معادله $x=g(x)$ همگراست.

توجه-۱) هر چند L به صفر نزدیکتر باشد سرعت همگرایی بیشتر است. (زودتر به ریشه می رسیم) و هر چند L به یک نزدیکتر باشد سرعت همگرایی کندتر است.

۲) اگر ۱ یا هر دو شرط قضیه فوق برقرار نباشد نتیجه نمی شود که دنباله $x_n = g\left(\begin{matrix} x \\ n-1 \end{matrix}\right)$ همگرا نیست بلکه توصیه می‌شود از این $g(x)$ بنویسید.

$$f(x) = x^3 + x - 1 = 0$$
$$x = 1 - x^3 = g_1(x)$$
$$x(x^2+1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{x^2+1} = g_2$$
$$x^3 = 1 - x \Rightarrow x = \sqrt[3]{1-x}.g_3(x)$$

مثال ۲: در فاصله $[0,1]$ کدام یک از $g(x)$ های فوق مناسبند؟

$$[0,1] \quad x = 1 - x^3 = g_1(x)$$
$$0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^3 \le 1$$
$$-1 \le -x^3 \le 0$$
$$0 \le 1 - x^3 \le 1$$
$$0 \le g_1(x) \le 1$$

$$\forall x \varepsilon (0,1) \quad |g'(x)| = |-3x^2| 3x^2$$
$$\forall x \varepsilon (0,1) \quad , x = \frac{2}{3} \rightarrow 3(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{3} > 1$$

پس شرط دوم قضیه فوق در مورد g_1 برقرار نیست پس g به دست آمده ممکن است مناسب نباشد.

$$x = \frac{1}{x^2+1} = g_2(x)$$

شرط اول $0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow x^2+1 \le 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x^2+1} \le 1 \Rightarrow 0 \le g_2(x) \le 1$$

$$g_2'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow |g_2'(x)| = \frac{2|x|}{(x^2+1)^2} < 1$$

شرط دوم

پس g_2 مناسب است.

تمرین- آیا g_3 مناسب است؟

$x_0 = 0/75$ انتخاب می کنیم.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{x_{n-1}+1}}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{0/75+1}} = 0/75593$$

$$x_1 = \frac{1}{0/75+1} = 0/75493$$

$$x_4 = \frac{1}{\sqrt{0/75493+1}} = 0/75489$$

تفاضل با قبل باید 0/0001 باشد.

کمتر از

شرط خاتمه عملیات: $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

تمرین- به روش تکرار ساده (نقطه ثابت) تقریبی از ریشه معادلات زیر را چنان بیابید که $\varepsilon = 0/001$ باشد.

2) $x - \cos x = 0$ $\quad a = 0/5 \quad b = 1 \quad x_0 = 0/75$

3) $2x - 1 - 2\sin x = 0$ $\quad x_0 = 1$

4) $x + \ln x = 0$ $\quad x_0 = 1$

می دانیم معادله $e^x - 3x^2 = 0$ سه ریشه در فاصله ¾ , $0/1$, $-1/0$ دارد، $g(x)$ های مناسبی جهت محاسبه تقریبی ریشه های معادله فوق بیابید که $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-3}$ باشد.

$$x^3 + x - 1 = 0$$
$$x(x^2+1) = 1$$
$$x = \frac{1}{x^2+1} = g(x) \rightarrow x_n = g(x_{n-1})$$
$$x_3 = ...$$

توجه- مجموعه ریشه های معادله $f(x) = 0$ با مجموعه ریشه های معادله $x = f(x)$ یکسان نیست.

- مثال: بااستفاده از روش نقطه ثابت ریشه معادله $x^3 + x^2 - 1 = 0$ با تقریب $0/0001$ به دست آورید.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 1 = 0$$
$$a = 0 \rightarrow f(0) = -1 < 0$$
$$b = 1 \rightarrow f(1) = 1 > 0$$

$f:[0,1]$ پیوسته

$f(x) = 3x^2 + 2x > 0 \rightarrow f$ اکیداً صعودی $x\varepsilon(0,1)$

پس $f(x) = 0$ در $[0,1]$ فقط یک ریشه دارد.

$$x^3 + x^2 - 1 = 0$$
$$x^2(x+1) = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{x^2+1}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{x+1}} = g(x) \qquad 1)\ 0 \le x \le 1 \rightarrow 0 \le g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \le 1$$

$$2)\ g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = -\frac{1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}} < 1$$

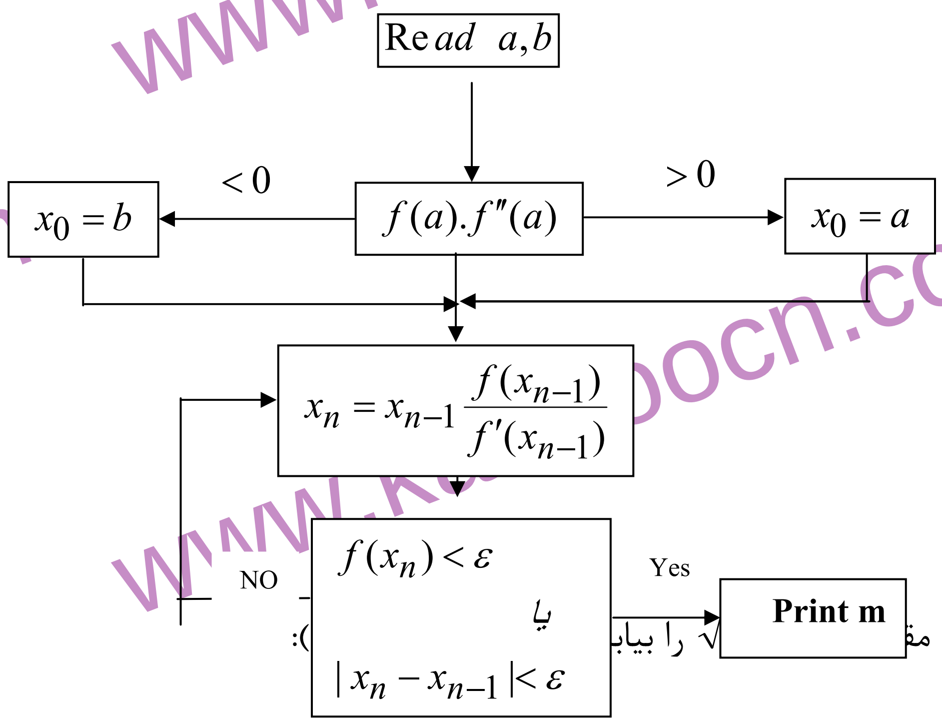
$$0 < x < 1$$

روش نیوتن رافسون یا روش مماس:

شرط استفاده از این روش آن است که علاوه بر سه شرط ابتدائی $f''(x)$ بر $[a,b]$ تغیر علامت ندهد.

توجه- نقطه مناسب برای شروع مانند x_0 به طوری که $f(x_0).f''(x) > 0$

$$x_n = x_{n-1} \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_n - 1)}$$



- مثال: مق... √ را بیابید :(

$$d=\sqrt{2} \to d^2=2 \to d^2-2=0$$

معادله $f(x)=x^2-2=0$ را در نظر بگیرید، مثل این است که بخواهیم ریشه مثبت معادله را پیدا کنیم:

$$\left.\begin{array}{ll} a=1 & f(1)=1-2<0 \\ b=2 & f(2)=4-2=2>0 \\ f:[1,2] & \text{پیوسته} \\ f'(x=2x>0 & \forall x\varepsilon[1,2] \\ f''(x)=2>0 & \forall x\varepsilon[1,2] \end{array}\right\} \text{فقط یک ریشه بین } 1,2$$

پس می توان از روش نیوتن استفاده کرد.

نقطه شروع: $x_0=1 \to f(x)=1-2=-1$

$$f''(2)=2 \to f(1).f''(1)<0 \to x_0=2$$

نقطه شروع: $x_0=2 \to f(2)=2$

$$f''(2)>0 \to f(2).f''(2)>0 + x_0=2$$

$$x_n=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^2-2}{2x_{n-1}} \qquad n=1,2,\ldots$$

$$x_0=2 \to x_1=2-\frac{4-2}{2\times 2}=2-\frac{1}{2}=1/5$$

$$x_2=1.5-\frac{2/25-2}{2\times 1/5}=1/5-\frac{0/25}{3}=1/41666\ldots$$

$$=1/4167$$

$$x_3=1/4167-\frac{2/007-2}{2\times 1/4167}=1/4142$$

$$f(x_3) = f(1/4142) = \frac{2/007-2}{2\times 14167} = 1/4142$$

$$f(x_3) = 0/000004 < 0/001$$

پس:

$$X_3 = 1/414$$

توجه- هرگاه α ریشه تکراری (مکرر) مرتبه m ام معادله $f(x)=0$ باشد در این صورت از فرمول $x_n = x_{n-1} - m\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ استفاده می کنیم. تا همگرایی سریعتر گردد.

تعریف ریشه مکرر مرتبه m ام معادله $f(x)=0$

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = ... = f^{m-1}(\alpha) =$$

α را ریشه مکرر گویند هرگاه $f(x)=0$ به صورت بالا باشد.

تمرین- با استفاده از روش نیوتن رافسون ریشه تقریبی معادلات زیر را بیابید. (تا ۴ رقم اعشار)

۱) $x - \sin x = 0$ ۲) $x^3 - 4 = 0$

۳) $3xe^x - 1 = 0$ ۴) $Sin - \frac{x}{2} = 0$

ثابت کنید $\alpha = 0$ ریشه تکراری مرحله چهارم معادله $x^2 + 2\cos x - 2 = 0$ سپس به روش نیوتن و با قراردادن $x_0 = 0/5$ این ریشه را بیابید.

تمرینات گوناگون:

۱) با استفاده از روش ترسیمی معادله $x = 10\cos x$ چند ریشه دارد؟ (معادله $x = 100\cos x$ سوال امتحان) چند ریشه مثبت دارد.

۲) تعداد ریشه های معادله $x+1.\cos x = x\sin x$ را به روش ترسیمی معلوم کنید. این ریشه ها نزدیک چه اعدادی هستند؟

۳) معادلات زیر چند ریشه حقیقی دارند؟

الف) $x^3 + x + 1 = 0$ ب) $x^x - 4 = 0$

ج) $x = \tan x$ د) $x\cos x = \sin x$

ر) $x^3 - 2x^2 + 3x + 7 = 0$ ز) $x^3 - (1-x)^7 = 0$

۴) کوچکترین ریشه معادله $\tan x - \cos x = \frac{1}{2}$ را به روش وتری به ازاء $a = 0/5$ ، $b = 1$ چنان بیابید که $\varepsilon = 10^{-5}$

۵) فرض کنید $x_{n+1} = \frac{x_n^k + Kax_n}{K_{x_n}^{k-1} + x}$ به عددی غیر هم صفر همگراست.

الف. K را چنان بیابید که مرتبه همگرایی دنباله حداقل ۲ باشد ریشه مکرر حداقل ۲ باشد، $(f'(\alpha) = 0$

تمرین های گذشته:

سه رقم اعشار گرد کنید:

$$\frac{\pi}{3\sqrt{5}} \quad , \qquad \varepsilon$$

$$\frac{\pi}{3\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\frac{\pi\sqrt{5}}{\sqrt{15}}=7.0251\frac{1}{15}=0.4683674\simeq 0.468$$

$\pi\simeq 3.142$ $\qquad E=0.5\times 10^{-3}$

$\sqrt{6}\simeq 2.236$ $\qquad E_{\pi}=0.5\times 10^{-3}$

$\frac{1}{15}\simeq 0.067$ $\qquad E_{\sqrt{5}}=0.5\times 10^{-3}$

$E_{\sqrt{5}}=0.5\times 10^{-3}$

گرد کردن:

$$E\leq 3.142\times 2.236\times E_{\frac{1}{15}}+3.142\times 0.067\times E_{\sqrt{5}}+2.236$$

$$0.067+E_{\pi}=0.5\times 10^{-3}\times(7.387)=0.004$$

کلی $E<0.004=E=0.0045\approx 0.005$

حاصل عبارت: ممیز شناور

$$\frac{0.618\times 10^{2}+0.184\times 10^{0}}{(0.427\times 10^{2})\times(0.36810^{2})}=\frac{0.620\times 10^{2}}{0.157\times 10^{4}}=0.394910^{-1}$$

$$=0.395\times 10^{-1}$$

$\sqrt{19}\pm\sqrt{7}$ سه رقم گرد شود

$\sqrt{7}=2.6457513\approx 2.646 \qquad E_{\sqrt{7}}=0.5\times 10^{-3}$

$\sqrt{19}=4.3588989\approx 4.359 \qquad E_{\sqrt{19}}=0.5\times 10^{-3}$

$E_{a+b}\leq 10^{-3}$

$7.004\leq \sqrt{7}+\sqrt{19}\leq 7.006$

$\sqrt{19}-\sqrt{7}=1.113 \qquad E_{a-b}\leq 10^{-3}$

$1.712\leq \sqrt{19}-\sqrt{7}\leq 1.714$

حل تمرین از جلسات قبل:

تقریبی از $e^{\frac{2}{3}}$ با خطای 10^{-2} را بیابید:

$\frac{(0.67)^5}{5!}=0.0011251<0.005 \quad : \frac{2}{3}\simeq 0.667$

$e^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$

$e^{\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}+\frac{(\frac{2}{3})^2}{2!}+\frac{(\frac{2}{3})^3}{3!}+\frac{(\frac{2}{3})^4}{4!}+\frac{(\frac{2}{3})^5}{5!}$

$e^{\frac{2}{3}}=1+0.667+0.222+0.049+0.008+0.001\simeq 1.947$

تقریبی از $\sin\frac{\pi}{11}$ با خطای 10^{-4}

$x=\frac{\pi}{11} \qquad ; \qquad \bar{x}=0.28560$

$\frac{0.28560}{5!}=0.00002\Rightarrow n=5$

$$Sinx \simeq x \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$Sin\frac{\pi}{11} \simeq - \frac{\left(\frac{\pi}{11}\right)^3}{5!} + \frac{\left(\frac{\pi}{11}\right)^5}{5!} \simeq 0.28560 - 0.00388 + 0.00002$$

$$\simeq 0.28174$$

تقریبی از $\ln\frac{5}{3}$ با خطای 10^{-2}

$$\frac{0.667}{9} < 0.005 \Rightarrow n = 9$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$x = \frac{2}{3} \Rightarrow \ln\left(\frac{5}{3}\right) \simeq \frac{2}{3} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{4} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5}{5}$$

$$- \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{6} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^7}{7} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^8}{8} \simeq 0.667 - 0.222 + 0.0099$$

$$-0.049 + 0.026 - 0.015 + 0.008 - 0.005 = 0.599$$

تقریبی از $Arc\tan\frac{\pi}{11}$ با خطای 10^{-2} :

$$\frac{\pi}{11} = 0.286$$

$$Arc\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\frac{(0.286)^5}{5} = 0.004 < 0.005 \Rightarrow n = 5$$

$$Arc\tan\frac{\pi}{11}\simeq 0.286-\frac{(0.286)^3}{3}+\frac{(0.286)^5}{5}=$$
$$=0.286-0.008+0.0004=0.277$$

$$Arctas\frac{\pi}{11}=0.278$$

تقریبی از 1 با خطای 10^{-5}:

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\dots$$

$$x=1\Rightarrow\frac{1^4}{3!}=\frac{1}{120}=0.008333<0.000005$$

$$x=1\Rightarrow\frac{Sinx}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}$$

$$x=1\Rightarrow 1-0.166667+0.008333-0.000195+0.00003=$$
$$=0.841177$$

$$\frac{1^8}{9!}=0.000003<0.000005\Rightarrow n=8$$

تعداد و حدود ریشه های معادله زیر را به کمک ترسیم بیاورید:

$$x=10\cos x \qquad \begin{cases} y_1=x \\ y_2=10\cos x \end{cases}$$

x	0	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{3\pi}{2}$	$\pm 2\pi$	$\times\frac{5\pi}{2}$	$\pm 3\pi$

y_2	10	0	-10	0	10	0	-10

$\cos x - x = 0 \quad ; \quad \varepsilon = 0.001$

$f(x) = Cosx - x$

$a = 0 \Rightarrow f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$

$b = 1 \Rightarrow f(1) = \cos(1) - 1 = -0.0001 < 0$

$f[0,1]$

$f'(x) = -s - n - 1 < 0$ نزولی

a	b	c	f(c)
0	1	0.5	0.378
0.5	1	0.75	0.018
0.5	1	0.625	0.186
0.625	0.75	0.688	0.084
0.688	0.75	0.719	0.033
0.719	0.75	0.734	0.0085
0.734	0.742	0.74	-0.0015
0.738	0.742	0.74	-0.0015
			C=0.739

دستگاه معادلات خطی:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

A= ماتریس ضرایب $\begin{bmatrix} a_{11} & a_2 & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_2 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

B=ماتریس طرف ثابت $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

X=ماتـــــــــــــــــــــریس مجهـــــــــــــــــــــولات $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$Ax = B$$

$$|A| \neq 0 \Rightarrow \exists \overset{-1}{A} \Rightarrow \overset{-1}{A} \Rightarrow \overset{-1}{A}(Ax) = \overset{-1}{A} B$$

$$Ix = \overset{-1}{A} B \Rightarrow x = \overset{-1}{A} B$$

محاسبه $\overset{-1}{A}$ د رحالت کلی توصیه نمی شود. زیرا دترمینال A محاسبه اش وقتگیر است بنابراین سعی می کنیم X را به روش های دیگری پیدا کنیم با فرض آنکه $|A| \neq 0$ (تا اینکه دستگاه فقط یک جواب منحصر به فرد پیدا کند).

روش مستقیم: در این روش مستقیماً جواب معادله را محاسبه کنیم. مشهور تنها خطای ناشی از گرد کردن اعداد در ماشین را خواهیم داشت). االبته دستگاه بزرگ باشد ممکن است رشدخطاها ما را جواب واقعی خیلی دور کند.

دستگاه های بالا مثلثی:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ + a_{33}x_n + a_{3n}\ x_n + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \end{cases}$$

دترمینال ضرایب $A = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$

حاصلضرب اعضای اول قطر اصلی $= |A|$

$|A| = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}$

فرض کنیم $|A| \neq 0 \qquad \Rightarrow a_{11} \ldots \neq 0 \ , \ \forall_i$

از معادله دستگاه بالا مثلثی می توانیم x_n را پیدا کنیم سپس از معادله قبلش x_{n-1} را پیدا می کنیم و به همین ترتیب تا برسیم به معادله اول که x_1 را حساب کنیم (روش جایگذاری پس رو)

طریقه حل روش حذفی گاوس:

ابتدا دستگاه n معادله n مجهولی * را به فرم بالا مثلثی تبدیل می کنیم برای این کار بردار B را به انتهای ماتریس A اضافه کرده ماتریس $[A, B]$ را ماتریس افزوده دستگاه * می گویند.

حال اعمال زیر را که عملیات سطری نام دارند روی ماتریس افزوده انجام می دهیم:

۱- تعویض دو سطر ماریس افزوده (تعویض سطر i ام با R_{ij},)

۲- ضرب عددی غیر صفر در اعضای یک سطر ماتریس افزوده:

$$\alpha = 0 \qquad , \qquad R_i(\alpha)$$

۳- افزدن مضربی از یک سطر ماتریس افزوده به سطر دیگر آن (افزودن α` به سطر i ام را با $R_{ij}(\alpha)$ نشان می دهند)

در ذیل با این عملیات یک دستگاه به فرم * را به بالا مثلثی تبدیل می کنیم:

۱- **مقیاس کردن:** اعضای ماتریس A را کاری کنیم که از نظر قدر مطلق کوچکتر یا مساوی با ۱ باشند (کافی است هر سطر را به بزرگترین قدر مطلق جملات آن سطر تقسیم کنیم) این کار فقط یک بار انجام بگیرد قبل از شروع روش گاوس.

۲- در ستون اول بزرگترین عضور از نظر قدر مطلق را پیدا کرده و سطر شامل آن را با سطر اول عوض می کنیم اگر α_{11} بزرگترین عضو از نظر قدر مطلق در اولین ستون باشد آن گاه مضاربی از α_{11} را طوری انتخاب می کنیم که اگر با α_{12} و α_{13} و ,...., α_{n1} (یعنی با اعضای زیر آن) جمع کنیم کلیه این اعضا صفر شود. بدین ترتیب اعضای زیر α_{11} را صفر کرده ایم مجدداً فرض می کنیم:

a_{22} بزرگترین عضو از نظر قدر مطلق در ستون دوم باشد سپس مانند قسمت قبل کلیه اعضای زیر a_{22} را نیز صفر می کنیم و به همین ترتیب ادامه می دهیم در نتیجه ماتریس A به یک ماتریس بالامثلثی تبدیل می‌شود.

- مثال دستگاه زیر را به روش حذفی گاوس (همراه با مقیاس کردن و ..) حل می کنیم

$$\begin{cases} x_1+4x_2+5x_3=2 \\ 2x_2-x_2-2x_3=1 \\ 5x_1+3x_2-4x_3=-2 \end{cases}$$

ماتریس افزوده:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{i3}(-1)]{R_{12}(-0.2)} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 1 & 0.4 \\ 1 & -0.5 & -1 & 0.5 \\ 1 & 0.6 & -0.6 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{12}} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.4 \\ 1 & 0.6 & -0.8 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_{i3}(-1)]{R_{12}(-0.2)} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0.9 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & -0.9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{23}}\begin{bmatrix}0 & -0.5 & -1 & 0.5\\ 0 & 1.1 & 0.2 & -0.9\\ 0 & 0.9 & 1.2 & 0.3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_{23}\left(\frac{-9}{1.1}\right)}\begin{bmatrix}1 & 0.5 & -1 & 0.5\\ 0 & 1.1 & 0.2 & 0.2\\ 0 & 0 & 1.04 & 1.04\end{bmatrix}$$

$$1x_1-0.5x_2-1x_3=0.5\rightarrow x_1+0.5-1=0.5\rightarrow x_1=1$$

$$1.1x_2+0.2x_3=0.9\rightarrow 1.1x_2+0.2=-0.9\rightarrow x_2=-1$$

$$1.04x_3=1.04\rightarrow x_3=1$$

روش حذفی گاوس جردن:

پس از مثلثی کردن به روش حذفی گاوس با استفاده از عملیات سطر ماتریس مثلثی را به ماتریس قطری تبدیل می کنیم (بالای قطر اصلی نیز صفر شود)

تمرین- دستگاه زیر را به روش حذفی گاوس و یک بار نیز با روش گاوس جردن حل کنید. (تا یک رقم اعشار)

$$\begin{cases}0.6x+3.8y+7z=5.7\\ 2.6x+3.17+5z=2.6\\ 3.7x+5.8y+2.9z=3.4\end{cases}$$

روش های تکراری:

در این روش ها به یک جواب تقریبی اولیه شروع می کنیم و آن را یک دستور بازگشتی به کار برده تا جواب تقریبی دیگری به دست آوریم با به کار بردن پی در پی این دستور دنباله ای از جوابها به دست می آید که تحت شرایط مناسب ما را به جواب واقعی نزدیک می کند. روش های تکراری دارای دو ویژگی سادگی عمل و سهولت اجرا به وسیله کامپیوتر هستند و نسبت به انتشار خطاها حساسیتی ندارند.

این روش معروف از روش های تکراری عبارتند از: روش ژاکوبی و گاوس سایدل.

روش ژاکوبی: دستگاه * را به فرم زیر مـی نویسـیم (از معادلـه اول x_1 و از معادلـه دوم x_2 و ... معادله n ام x_n را را حساب می کنیم:

$$x_1=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2-...-a_{1n}x_n)$$
$$x_2=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_2x-...-a_{2n}x_{2n}x_n)$$
$$x_n=\frac{1}{a_{nn}}(b_n-a_{n1}x-...-a_{nn-1}x_n)$$

سپس یک مقدار تقریبی اولیه مانند x^0 برای بـردار جـواب x انتخـاب کـرده و در طرف راست معادلات فوق جایگزین می کنیم تا یک مقـدار تقریبـی دیگـری بـرای جواب به دست اید. مانند $X^{(1)}$؛ مجدداً $X^{(2)}$ به دست آیـد و بـه همـین ترتیـب ادامه می دهیم.

شرط توقف عملیات: اگر $|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}|<\varepsilon$ به شرطی که $\forall_i$ در این صـورت $X^{(k+1)}$ جواب دستگاه است.

روش گاوش سایدل: این روش همانند روش ژاکوبی می باشـد فقـط در هـر مرحلـه آخرین تقریبی را که برای هر x_i تا آن مرحله به دست آورده ایم مورد استفاده قرار می دهیم (یعنی آنکه پس از به دست آوردن x_1 از معادله اول با اسـتفاده از جـواب تقریبی اولیه در معادله دوم وقتی می خواهیم x_2 را به دست آوریـم x_1 بـه دسـت آمده از معادله اول را به اضافه بقیه جوابهای تقریبی اولیه جایگزین می کنیم تا x_2 جدید به دست آید سپس برای محاسبه x_3 از معادله سـوم دوبـاره بـه جـای x_2 و

x_1 آن همین x_2 و x_1 اخیر را به اضافه مقادیر تقریبی اولیه قرار مـی دهـیم و بـه همین ترتیب جلو می رویم)

توجه- فرض کنید برای هر I داشته باشیم: $[\,|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}|\,]$

در این صورت ماتریس ضرایب A را قطری مسلط می نامنـد. در ایـن صـورت روش ژاکوپی و روش گاوس سایدل با انتخاب هر مقدار تقریبـی اولیـه $x^{(0)}$ همگـرا مـی باشد (همگرا: ما را به جواب واقعی نزدیک می کند)

شرط قطری مسلط بودن A یک شرط کافی برای همگرایـی اسـت امـا ایـن شـرط شرط لازم نمی باشد. یعنی ممکن است ماتریس ضرایب A قطـری مسـلط نباشـد، ولی همگرایی اتفاق می افتد.

توجه- هر گاه ضرایب $|a_{ii}|$ نسبت به سایر ضـرایب در هـر معادلـه نسـبتاً بـزرگ باشد انتخاب مقادیر انتخابی اولیه به ازای $\forall_i, x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$ مناسب است.

توجه- برای بهتر کردن شانس و سرعت همگرایی قبل از استفاده از روش تکـراری باید دستگاه را طوری مرتب کرد که تا حد امکـان از ضـریب قطـری یعنـی a_{ii} بـر حسب قدر مطلق بیشترین مقدار موجود در همان سطر را (یعنی سطر I ام) داشـته باشد شرط توقف عملیات نیز مانند روش ژاکوبی است.

مثال- دستگاه زیر را به روش ژاکوبی حل کنید:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 0x_3 = 12 \\ -4x_1 + 12x_2 - 6x_3 = \\ 0x_1 - 6x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & 14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} |7| \geq |-4| + |0| \\ |12| \geq |-4| + |-6| \\ |14| \geq |0| + |-6| \end{matrix}$$

پس قطری مسلط است. اگر A قطری مسلط نباشد در این صورت با جابجائی معادلات یا افزودن مضربی به معادله دیگر می توان A را قطری مسلط نمود)

فرم کلی: $\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{7}(12 + 4x_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{12}(4x_1 + 6x_3) \\ x_3 = \dfrac{1}{14}(6x_2) \end{cases}$

$X^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ قدار اولیه تقریبی به دلخواه معین می کنیم

$$X^{(1)} : \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{7}(12 + 4 \times 0.8333) = 2.1905 \\ x_2 = \dfrac{1}{12}(4+6) = 0.8333 \\ x_3 = \dfrac{1}{14}(6) = 0.4.4286 \end{cases}$$

$$X^{(1)}:\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}(12+4) = 2.2857 \\ x_2 = \frac{1}{12}(4+6) = 0.8333 \\ x_3 = \frac{1}{14}(6) = 0.4286 \end{cases}$$

$$X^{(1)}:\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}(12+4\times 0.8333) = 2.1905 \\ x_2 = \frac{1}{12}(4\times 2.2857+6\times 0.4286) = 0.9762 \\ x_3 = \frac{1}{14}(6) = (6\times 0.8333) = 0.3571 \end{cases}$$

$$X^{(3)}: x_1 = \frac{1}{7}(12+4\times 0.9762) = 1.2721$$

$$x_2 = \frac{1}{12}(6\times 0.9762) = 0.4184) = 0.4184$$

- مثال: دستگاه مثال قبل را به روش گاوس سایدن و با همان مقدار تقریبی اولیه حل کنید:

همان مراحل قبل دوباره تکرار می‌شود

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}(12+4x_2) \\ x_2 = \frac{1}{12(4x_1+6x_3} \\ x_3 = \frac{1}{14}(6x_2) \end{cases} \xrightarrow{\text{قریب}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X^{(1)}:\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}(12+4) = 2.2857 \\ x_2 = \frac{1}{12}(4\times 2.25857+6) = 1.2619 \\ x_3 = \frac{1}{14}(6\times 1.2619) = 0.5408 \end{cases}$$

$$X^{(2)}:\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}(12+4\times 1.2619) = 0.5408 \\ x_2 = \frac{-1}{12}(4\times 2.4354+6\times 0.5408) = 0.0822 \\ x_3 = \frac{1}{14}(6\times 1.0822) = 0.4638 \end{cases}$$

$$X^{(1)}:\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}(12+4\times 1.0822) = 2.3327 \\ x_2 = \frac{1}{12}(4\times 2.3327+6\times 0.4638) = 1.0095 \\ x_3 = \frac{1}{14}(6\times 1.0095) = 0.4326 \end{cases}$$

و به همین ترتیب عملیات را ادامه می دهیم. سرعت همگرایی روش دوم بیشتر از روش اول است

$$\begin{cases} x_1 = 2.264 \\ x_2 = 0.960 \\ x_3 = 0.411 \end{cases}$$

- مثال: دستگاه زیر را به هر دو روش حل کنید و مقدار اولیه را $x_i = 1$ را قرار دهید:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_3 - x_4 = 4 \rightarrow |4| \geq |-1| + |-1| \\ 4x_2 - x_3 - x_4 = 4 \rightarrow |4| \geq |-1| + |-1| \\ x_1 + x_2 - ax_3 = 4 \rightarrow |-4| \geq |1| + |1| \\ x_1 + x_2 - 4x_4 = -4 \rightarrow |1| + |1| \end{cases}$$

قطری مسلطی

$$x_1 = 1 + \frac{1}{4}(x_3 + x_4)$$
$$x_2 = 1 + \frac{1}{4}(x_3 + x_4)$$
$$x_3 = 1 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)$$
$$x_4 = 1 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)$$

$$X: \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{4}(1+1) = \frac{3}{2} = -2 - \left(\frac{1}{2}\right) \\ x_2 = 1 + \frac{1}{4}(1+1) = \frac{3}{2} \\ x_3 = 1 + \frac{1}{4}(1+1) = \frac{3}{2} \\ x_4 = 1 + \frac{1}{4}(1+1) = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad X: \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = \frac{7}{4} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ x_2 = 1 + \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = \frac{7}{4} \\ x_3 = 1 + \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = \frac{7}{4} \\ x_4 = 1 + \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$x^{(3)} = \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{4} + \frac{7}{4}\right) = \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ x_2 = \ldots\ldots\ldots \\ x_3 = \ldots\ldots\ldots \\ x_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

جواب واقعی

$$x^{(n)}: x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$: x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \to 2$$

مثال- مطلوبست حل دستگاه زیر به روش ژاکوبی و روش گاوس سایدن:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_3 = 2 && 1 \geq |3| \\ &5x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 && 1 \geq |5| + |2| \\ &x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -11 && 2 \geq + |6| \end{aligned}$$

قطری مسلط نیست و باید آنرا به این حالت تبدیل کنیم

با جابجائی معادله داریم:
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -11 \\ x_1 3x_3 = 2 \end{cases}$$

قطری مثلثی است

$$\begin{aligned} &|5| \geq |1| + |2| \\ \Rightarrow &|6| \geq |1| + |2| \\ &|3| \geq |1| \end{aligned}$$

حالا با مقدار $X^{(0)} = (0,0,0)$

تمرین- حل مثال بالا با مقدار $(0,0,0)$

مثال- حل دستگاه به هر دو روش:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس به قطری مسلطی تبدیل شود

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ x+2y+z=2 \\ 2x+y-z=4 \quad \Rightarrow \qquad |-1| \geq |2|+|1| \end{cases}$$

منهای یک برابر معادله دوم را به معادله سوم بیفزاییم.

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ x+2y+z=2 \\ x-y-2z=2 \Rightarrow |-2| \geq |1|+|-1| \end{cases}$$

دستگاه های زیر را به روش ژاکوبی وگاوس سایدل حل کنید. (سعی کنید ابتدا ماتریس ضرایب قطری مسلط باشد)

$$\begin{aligned} &x-y+10z=-7 \\ &20x+3y-2z=5 \qquad\qquad X^{(0)}=(0,0,0) \\ &2x+8y+4z=25 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 6x-3y+z=1 \\ 2x+y-8z=-15 \qquad\qquad X^{(0)}=(0,0,0) \\ x-6y+z=10 \end{cases}$$

به همراه یک برنامه (روش گاوس)

$$\begin{cases} 2.51x_1+1.48x_2+4.53x_3=0.05 \\ 1.48x_1+0.93x_2-1.3x_3=1.03 \\ 2.68x_1+3.04x_2-1.48x_3=0.53 \end{cases}$$

حل تمرین از جلسه قبل

$$\left.\begin{array}{l}\cos x - x = 0\\ f(0) = 1-0=1\\ f(1) = (0.540-1) = -0.46 < 0\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} f:[0.1] \\ f'(x) = -sonx - 1 < 0\end{array}$$

اکیداً نزولی

a	B	C	$F(C)$
0	1	0.5	0.3776
0.5	1	0.75	-0.0183
0.5	0.75	0.625	0.1860
0.625	0.75	0.6875	0.0853
0.6875	0.75	0.7187	0.0340
0.7187	0.75	0.7344	0.0078
0.7344	0.7422	0.7383	0.0052
0.7383	0.7422	0.7409	-0.0019
0.7383	0.7402	0.7392	-0.0002 <
			0.001

C=0.7392

$x^3 + x - 1 = 0 \qquad a = 0, b = 1, \varepsilon = 10^{-2}$

$f(x) = x^3 + x - 1$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0\end{array}\right\} \qquad f:[-1,1] \qquad 3x^2 + 1 > 0$$

پیوسته　　اکیداصعودي

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \frac{1-0}{2^n} < 2^n \Rightarrow \log_2^{100} < n$$

$6.64856 < n \rightarrow n = 7$

$x - 2^{-x} = 0$, $a = 0$, $b = 1$ $\varepsilon = 10^{-5} = 0.00001$

$\left.\begin{array}{l} a = 0 \rightarrow f(0) = -2^{0} = -1 < 0 \\ b = 1 \rightarrow f(1) = 1 - 2^{-1} = 0.5 > 0 \end{array}\right\}$ $f:[0.1]$ پیوسته

$f'(x) = 1 - 2^{-x} \ln 2 > 0$

a	B	C	$F(C)$
0	1	0.5	-0.207107
0.5	1	0.75	0.155393
0.5	0.75	0.625	-0.023420
0.625	0.75	0.6875	0.066571
⋮	⋮	⋮	⋮
0.641175	0.69123 6	0.691206	0.000030
0.641175	0.69120 6	0.641190	0.0000<0.00001

C=0.64449

روش وتری (1) $x + \cos x = 0$; $\varepsilon = 10^{-2}$

(2) $x^{2} - 2^{x} = 0$; $\varepsilon = 10^{-2}$

$x + \cos x = 0$; $\varepsilon = 10^{-2}$

پیوسته $f:[-1.0]$

$f'(x)=1-\sin x>0$

$$\left.\begin{array}{l} f(b)=0+1=1 \quad >0 \\ f(a)=-1-0.5403<0 \end{array}\right\}$$

a	b	c	f(c)
-1	0	-0.68	0.1
-1	-0.68	-0.73	0.02

(روش نقطه ثابت)

$x_0=1 \qquad x+\ln x=0$

$$\ln x=-x \Rightarrow x=e^{-x}=g(x)$$

$$|g'(x)|=|-e^{-x}|=e^{-x}$$

در فاصله $[\frac{1}{e},1]$ دقیقاً یک ریشه دارد

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}+\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}=\frac{1}{e}-1<0 \\ f(1)=1+\ln 1=1>0 \end{array}\right\}$$

$\frac{1}{e}<x<1$ (اکیداً صعودی) $f'(x)=1+\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}-1<0$

$$\frac{1}{e}<x<1 \Rightarrow \frac{1}{e}<g(x)<1$$

شرط صحیح است $\frac{1}{e}<e^{-x}<1$

امتحان می کنیم
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{e}<e^{-\frac{1}{e}}<1 \\ \frac{1}{e}<e^{-1}<1 \end{array}\right.$$

$$x = g(x) = e$$

$$x = g(x) = e^{-x}$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = g(x_0) = e^{-1} = 0.3679$$

$$x_2 = g(x_1) = e^{-0.3679} = 0.3679$$

$$x_3 = g(x_2) = x^{0.6922} = 0.5005$$

.... ادامه می دهیم

$f:[0,\frac{\pi}{2}]$ پیوسته

$f(0) = \frac{-1}{2} < 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin x > 0$

معادله بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ دقیقاً یک ریشه دارد

$x_n = g(x_{n-1})$ با هر x بین $[0,\frac{\pi}{2}]$ شروع کنیم به جواب می رسیم

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2}\cos x_0 = \frac{1}{2}\cos(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\cos(0.439) = 0$$

تعداد جملات مورد لزوم سری تیلور $f(x) = x^x$ حول $x = 0$ برای های ۰ و ۱ تا

۴ رقم اعشار

$$f(x)=e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}....\frac{x^{n}}{n!}+R,$$

$$\varepsilon=0.5\times10^{-4}\rightarrow 0.00005$$

$$R_n<0.510^{-4}\Rightarrow R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$x=100\cos x$ چند ریشه مثبت دارد؟ (ترسیم)

$$\begin{cases} y=x \\ y=100\cos x \end{cases}$$

$$C_1=\frac{-1\times1}{1+0.46}=0.68$$

$$f(c)=-0.68+\cos(-0.68)=-.1$$

کوچکترین ریشه مثبت معادله $x^{2}\sin=\cos x$ به روش نیوتن رافسون

$$\varepsilon=10^{-2}$$

$$f(0)=0^{2}\sin(0)-\cos(0)<0$$

$$f(1)1^2\sin(1)-\cos(1)>0$$

$f:[0,1]$ پیوسته

اکیداً صعودی $f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x+\sin x>0$ دقیقاً یک ریشه بین صفر و یک موجود است.

شرایط نیوتن رافسون برقرار است $f(x)=f''(x)>0$

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

برای شروع $\rightarrow\ f(x).f''(x)>0$

$$f''(x)=2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin(x)+\cos x$$

نقطه صفر مناسب $f(0)=-1\ ,\ f''(0)=1\Rightarrow f(0).f''(0)<0$ نیست

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{36}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}8\simeq\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-0.738<0$$

این نقطه مناسب نیست $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{\pi}{3}.\sqrt{3}-\left(\frac{\pi^2}{36}\right).\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}>0$

$x_0=1$: نقطه اول چون شرایط نقطه مناسب را داراست

$$x_n=x_{n-1}\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\frac{f(1)}{f'(1)}=....$$

به همین ترتیب ادامه می دهیم.

ریشه معادله $x-\frac{1}{2}\cos x$ با روش تکرار ساده $[0,\frac{\pi}{2}]$

$$x-\frac{1}{2}\cos x=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}\cos x=g(x)$$

شرط برقرار $0<x<\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 0<\frac{1}{2}\cos(x)<\frac{\pi}{2}$$

است

درون یابی:

فرض کنید $n+1$ نقطه متمایز مانند $\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_n \\ y_n \end{vmatrix}$ در صفحه مفروضند، تابع f را می خواهید چنان پیدا کنیم که از تمامی این نقاط عبور کند. یعنی $f_i=y_i=f(x_i)$ و همچنین می خواهیم $f(x)$ را برای نقاط دیگر بر آورد کنیم.

فرض می کنیم $x_0<x_1<x_2<...<x_n<x_{n+1}$ نقاط از کوچک به بزرگ شده باشد و $x\varepsilon[x_0,x_n]$ به طوری که $x\neq x_i$ در این صورت مساله تخمین $f(x)$ را درون یابی می نامند.

در این فصل تنها درون یابی به وسیله چند جمله ای ها بررسی می‌شود یعنی تابع f را یک تابع چند جمله مانند $P_n(x)$ که یک چند جمله ای به درجه n در نظر می گیریم.

می دانیم از نقطه متمایز یک خط می گذرد از سه نقطه متمایز یک سهمی می گذرد و ... به همین ترتیب از n+1 نقطه متمایز یک چند جمله درجه n عبور می کند.

در روش زیر که به روش لاگرانژ معروف است راهی برای رسیدن به این چند جمله ای مطرح می کند.

روش لاگرانژ

در حالت ساده برای دو نقطه $A\begin{vmatrix}x_0\\f_0\end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix}x_1\\f_1\end{vmatrix}$ معادله خط

$$AB: y-f=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}(x_1-x_0)$$

$$A\begin{vmatrix}x_0\\f_0\end{vmatrix} \quad AB: y-f_0=\frac{f_i-f_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$B\begin{vmatrix}x\\f_1\end{vmatrix} \quad y=f_0+\frac{f_1-f_0}{x_1-x_{x_0}}(x-x_0)=\frac{f_0(x_1-x_0)+f(f_1-f_0)(x-x_0)}{x_1-x_0}=$$

$$\frac{f_{0(x_1-n_0-x+n_0)+f_i(x-x_0)}}{x_1-x_0}$$

$$y=f_0\frac{x-x_1}{x_0-c_1}+f_1\frac{x_1-x_0}{x_1-x_0}=P_1(x)$$

نتیجه فوق باعث به وجود امدن این ایده برای لاگرانژ که چند جمله ای $p_{n(x)}$ را تعمیمی از حالت بالا درنظر بگیرد. ثابت می‌شود که:

فقط یک چند جمله ای حداکثر از درجه n مانند $p_{n(x)}$ وجود دارد به طوری که

$P(x_i) = f_i$ (۱) $(i = 0,1,\dots,n)$

فرض کنید $P(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \dots + f_n L_n(x)$ در این صورت شرط (۱) برقرار خواهد بود هرگاه:

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ L_i(x_j) = 0 \quad i \neq j \end{cases}$$

برای تعیین $L_i(x)$ از معادله $i \neq j$:

$x_0, x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ می باشد. که یک چند جمله ای درجه n است و چون باید $L_i(x_i) = 1$ با قراردادن x_0 به جای x در عبارت اخیر باید داشته باشیم:

چندجمله ای لانگرانژ

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

با محاسبه $L_i(x)$ و استفاده از رابطه 2 یک چند جمله ای به دست می آید که در (1) صدق می کند و ثابت می‌شود این چند جمله ای منحصر به فرد است.

- مثال: چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به دست آوریـد و $f(-0.5)$ را تخمین بزنید.

x_i	-2	-1	0
f_i	3	1	1
	$i=0$	$i=1$	$i=2$

بین این نقاط

-0.5∈(-2,0)

$$P(x)=f_0L_0(x)+f_1L_1(x)+f_2L_2(x)$$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x+2)(x-0)}{(-1+2)(-1-0)}=\frac{x^2+x}{2}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x+2)(x+0)}{(-1+2)(-1-0)}=\frac{x^2+3x}{2}+2$$

$$\Rightarrow P(x)=3\left(\frac{x^2+x}{2}\right)+1\left[-(x^2+2x)\right]+1\times\frac{x^2+3x+2}{2}$$

$$=\frac{3x^2}{2}+\frac{3}{2}x-x^2-2x=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1$$

$$P(x)=x^2+x+1$$

$$P(-0.5)=(-0.5)^2+(0.5)+1$$
$$=0.75$$

ضمناً: $L_0(x)+L_1(x)+L_2(x)=1$

توجه: در حالت کلی نیز ثابت می‌شود:

$$\sum_{i=0}^{n} L_1(x)=1$$

- مثال: چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را پیدا کنید:

x_i	-2	-1	0	2
f_i	3	1	1	7

$$P(x) = f_0L_0(x) + f_1L_1(x) + f_2L_2(x) + f_3L_3(x)$$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$
$$= \frac{x^2+x}{2} \times \frac{x-2}{-2-2} = \frac{x^3-x^2-2x}{-8}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -(x^2+2x)\frac{x-2}{-1+2} = \frac{x^3-4x}{3}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{x^2+3x+2}{2}\times\frac{x-2}{0-2}$$

$$=\frac{x^3+x^2+10x-4}{-4}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{(x+2)(x+1)(x+0)}{(2+2)(2+1)(2-0)}=\frac{x^3+2x^2+2x}{24}$$

$$\Rightarrow P(x)=3\left(\frac{x^3-x^2-2x}{-8}\right)+1\left(\frac{x^3-4x}{3}\right)+1\left(\frac{x^3-4x}{3}\right)$$

$$+1\left(\frac{m^3+x^2-4x-4}{-4}\right)+7\left(\frac{x^3+2x^2+2x}{24}\right)$$

چون نقطه $\begin{array}{|l}2\\7\end{array}$ که در مثال ۲ داشتیم $P(x)=x^2+x+1$ نقطه ای بود که در چند جمله ای مثال (۱) صدق نمی کرد لذا چند جمله ای حاصل همان چند جمله مثال (۱) گردید و چند جمله ای درجه ۳ نشد.

توجه: همان طور که دیدیم با اضافه کردن یک نقطه به جدول شماره (۱) تقریباً همان عملیات را برای پیدا کردن $p(x)$ تکرار کردیم بعد روشی را ارائه می دهیم که تنها با عملیات ساده تری درجه چند جمله ای درون یاب را تعیین می کنیم بلکه افزودن یک یا چند نقطه به جدول تابعی چند جمله ای جدید با استفاده از چند جمله ای قبلی محاسبه خواهد شد.

تمرین-

(۳) با استفاده از $Cos45^\circ = 0.7071, Cos0^\circ = 0.5$ یک چند جمله ای در جه یک پیدا کنید که از این نقاط بگذرد و با توجه به آن مقدار تقریبی $Cos0^\circ$ را بیابید سپس عدد پیدا شده را با مقدار واقعی $Cos50^\circ$ مقایسه کرده خطا را تعیین کنید.

(۴) با به کار بردن درون یابی برای تابع $y = \sqrt{x}$ در نقاط $x_0 = 1 , x_1 = 4$ تقریب هایی برای این تابع در $x = 3, x = 3$ به دست آورید.

روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن:

تعریف- فرض کنید $x_\circ, x_1 ,..., x_n$ نقاطی متمایزند تفاضلات مرتبه اول در x_i و x_{i+1} چنین تعریف می‌شود.

$$f[x_i, x_{i+1}]\frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

تفاضلات مرتبه اول در x_0 و x_{i+1}

تفاضلات مرتبه n در نقاط $x_n ,..., x_1, x_0$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_0, ... x_{n-1}] - f[x_1, ..., x_n]}{x_0 - x_n}$$

می توان ثابت کرد که $f(x) = P(x) + R(x)$ به طوری که $P(x)$ یعنی چند جمله ای دورن یاب برابر است با:

$$P(x) = f_0 + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$
$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n]$$

- مثال ۱): چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن به دست آورید سپس نقطه ۷ و ۲ را به جدول اضافه کرده و چند جمله ای درون یاب آن را محاسبه کنید:

x_i	f_i	$f[x_\infty, x_{i+1}]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
-2	3	$\frac{3-1}{-2-(-1)} = -2$	
-1	1	$\frac{3-1}{-2-(-1)}$	$\frac{-2-0}{-2-0} = -1$
0	1	$\frac{1-1}{-1-0} = 0$	

$$f(x) = f_0 + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x, x_1, x_2]$$

$$f(x) = 3 + (x+2)(-2) + (x+2)(x+1) = x^2 = x + 1 \quad (1)$$

x_i	-2	-1	0	2
f_i	3	1	1	7

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_0,x_1,x_2,$
-2	3			
-1	1	$\frac{3-1}{-2-(-1)}=-2$	$\frac{-2-0}{-2-0}=1$	
0	1	$\frac{1-1}{-1-0}=0$	$\frac{0-3}{-1-2}=1$	$\frac{1-1}{-2-2}=0$
2	7	$\frac{0-3}{-1-2}=3$		

$$P(x)=f_0+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_2,x_3]$$

$$P(x)=3+(x+2).(-2)+(x+2)(x+1)(1)+(x+2)(x+1)(x-0)\times 0$$

$P(x)=x^2+x+1$ نقطه $(2,7)$ در چند جمله ای قبل صدق میکند

خطای چند جمله ای درون یاب:

معمولاً درون یابی برای تقریب توابعی که کارخهای عددی مانند مشتق گیری و انتگرال گیری روی آنها مشکل و غیر ممکن است استفاده می کنیم. برای این منظور تابع $f(x)$ را که $[a,b]$ تعریف شده در نظر می گیریم این تابع را به وسیله نقاط $x_0=a$ و $x_n=b...,x_2+x_1$ به n قسمت تقسیم می کنیم سپس از این $n+1$ نقطه متمایز یک چند جمله ای درجه n به نام $P_{n(x)}$ عبور می

دهیم. $P_{n(x)}$ تقریبی است برای $f(x)$ چون کارهای عددی مانند مشتق گیری و انتگرال گیری بسیار ساده است. اگر بخواهیم مقدار خطای $P_{n(x)}$ $P_{n(x)}$ را نسبت به $f(x)$ پیدا کنیم، در خور نقاط درون یابی یعنی $x_0, x_1, ..., x_n$ واضح است که مقدار خطای ان در خود نقاط صفر است. زیرا هم $f(x)$ و هم $P_{n(x)}$ ا زاین نقاط می گذرد. اما اگر در نقطه ای غیر این نقاط بخواهیم $f(x)$ و هم $P_{n(x)}$ را پیدا کنیم جواب ما دارای خطاست. با استفاده از قضیه زیر این خطا را به دست می آوریم.

قضیه- فرض کنید تابع f بر $[x_0, x_n]$ تعریف شده است و $P_{n(x)}$ چند جمله ای منحصر به فرد حداکثر از درجه $P_{n(x)}$ باشد که از این نقاط می گذرد و $f_{(x)}^{(n+1)}$ بر بازده فوق موجود باشد. در این صورت برای هر x در x_0, x_n داریم:

$$f(x) - P(x) = (x - x_0)....(x - x_n)\frac{f_{(c)}^{(n+1)}}{(n+1)!}, \exists C \in (x_0, x_n)$$

در عمل چون پیدا کردن مقدار C مشکل است لذا اگر بتوان کران بالایی برای $\left|f_{(x)}^{(n+1)}\right|$ حساب کنیم، مثلاً $\left|f_{(x)}^{(n+1)}\right| \leq M$ آن گاه داریم:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{|(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)|M}{(n+1)!}$$

- مثال: با استفاده از درون یابی خطی (یعنی چند جمله ای درجه ۱) تابع $f(x) = \ln x$ را درون یابی کنید سپس مقدار $\ln 3.16$ را تعیین کرده

حداکثر خطای آن را مشخص کنید. هرگاه بدانیم $\ln 3.1 = 1.1314$ و $\ln 3.2 = 1.632$ (به روش لانگرانژ)

x_i	3.1	3.2
f_i	1.131 4	1.163 2

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-3.2}{3.1-3.2} = \frac{x-3.2}{-0.1} = 10x+32 = 32-10x$$

$$L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x-3.1}{3.2-3.1} = \frac{x-3.1}{0.1} = 10x-32$$

$$P(x) = 1.1314(32-10x) + 1.1632x - 36.0592$$

$$= 0.1456 + 0.318x$$

$$P_{(3.16)} = 0.1456 + 0.318(3.16) = 1.15048 \sim 1.15.5$$

$$\ln 3.16 \sim 1.1505$$

$$f(x) = Lnx \sim P(x) = 0.1456 + 0.318c$$

قضیه $\rightarrow f(x) - P_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(c) : C \in [3.1, 3.2]$

$$x = 3.16 \rightarrow |f(3.16) - p(3.16)| = \left| \frac{(3.16-3.1)(3.16-3.2)}{2} \left(\frac{-1}{C^2} \right) \right| =$$

مقدار خطا: $\left|\frac{0.0024}{2}\left(\frac{1}{c^2}\right)\right| = \frac{0.0012}{C^2} :\leq c \leq 3.2$

این میزان خطا وقتی ماکزیمم است که $c = 3.1$

این میزان خطا وقتی مینیمم است که $c = 3.2$ (C مخرج کسر است)

$$\frac{0.0012}{(3.1)^2} = 0.000124889$$

$$\frac{0.0012}{(3.1)^2} = 0.000117187$$

مثال (۲)- چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را بـه روش نیـوتن بـه دست آوره سپس نقاط $(-2,-1),(-1,0)$ را به آن اضـافه کنیـد و مجـدداً $P(x)$ را بیابید.

(قسمت اول مساله قبلاً حل شده)

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_i+2]$	$f[x_i,\ldots,x_i+3]$	$f[x_0,x_1,..x_4$
0	-1				
1	0	$\frac{-1-0}{0-1}=1$			
2	-3	$\frac{0-(-3)}{1-2}=-3$	$\frac{1-(-3)}{0-1}=-2$		

-1	0	$\frac{-3-0}{2-(-2)}=-1$	$\frac{-3-(-1)}{1-(-1)}=-1$	$\frac{-2-(-1)}{0-(-1)}=-1$	
-2	-1	$\frac{0+1}{-1-(-2)}=1$	$\frac{-1-1}{2-(-2)}=\frac{-1}{2}$	$\frac{-1-\left(\frac{-1}{2}\right)}{1-(-2)}=-\frac{1}{6}$	$\frac{-1-\left(\frac{-1}{6}\right)}{0-(-2)}=\frac{-5}{12}$

$$P(x)=-1+(x-0)(1)+(x-0)(x-1)(-2)+(x-0)(x-1)(x-2)(-1)$$
$$+(x-0)(x-1)(x-2)(x+1)\left(\frac{-5}{12}\right)$$

چند جمله ای درون یاب $P(x)=\frac{-5}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{7}{12}x^2+\frac{1}{6}x-1$

تمرین-

۳) فرض کنید $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$ و $x_i=i$ برای $i=0,1,2$ یک کران بالا برای خطای چند جمله ای درون یاب f در نقاط فوق بیابید همچنین ابتدا چند

جمله ای درون یاب f را بـه دسـت آوریـد. سـپس $f=1.5$ را تقریـب زده و خطای ان را پیدا کنید.

۴) ثابت کنید مجموع چند جمله ای های لانگرانژ برابر است با ۱:

$$\sum_{i=9}^{n} L_1(x)=1$$

تفاضلات متناهی یا درون یابی با استفاده از نقاط متساوی الفاصله:

هرگاه نقاط دورن یاب متساوی الفاصله باشند فرمول های ساده تری برای محاسـبه چند جمله ای های درن یاب و تخمین $f(x)$ بـرای یـک x غیـر جـدولی موجـود است هرگاه فاصله هر دو نقطه متوالی برابر با n باشد جدول قبل به فرم زیـر سـاده می‌شود:

x_i	f_0	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_i+2]$	$f[x_i,\ldots,x_i+3]$
x_0	F_0			
x_1	f_1	$\frac{1}{\mathrm{h}}(f_1-f_0)$	$\frac{1}{h^2}(f_2-2f_1+f_0)$	
x_2	f_3	$\frac{1}{h}(f_2-f_1)$	$\frac{1}{h^2}(f_3-2f_2+f_1)$	$\frac{1}{3!h^3}(f_3-3f_2+3f_1-f_0)$
x_3	f_3	$\frac{1}{h}(f_3-f_2)$		

با استفاده از نماد گذاری می توانیم جدول فوق را به صورت زیر بنویسیم:

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_1$$

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{h-1} f_i)\Delta^{n-1}_{f_{i-1}} - \Delta^{n-1}_{f_i}$$

$$x_{i+1} - x_i = h \qquad i = 0,1,\dots,n-1$$

عملگر Δ را که به صورت بالا تعریف شده عملگر تفاضلات پیش رو می نامند.

در این صورت خواهیم داشت:

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta(f_0) = \Delta(f_1 - f_0) = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)$$
$$= f_2 - f_1 + f_0$$

$$\Delta^3 f_0 = \Delta(\Delta^2 f_0) = \Delta(f_2 - 2f_1 + f_0) = (f_3 - 2f_2 + f_1) - (f_2 - 2f_1 + f_0) = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$$

قضـــــیه- (ارتبـــاط تفاضـــلات پـــیش رو و تفاضـــلات نیـــوتن): فـــرض کنیـــد

$$x_0, x_1, x_2, \dots x_n] = \frac{1}{n!h^n}\Delta^n f_0$$

و چند جمله ای درون یاب تابع f به فرم زیر است.

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{1}{n!h^n}\Delta^n f_0$$

و چند جمله ای درون یاب تابع f به فرم زیر است:

$$f(x) = f_0 + 0\Delta f_0 + \frac{0(0-1)}{2!}\Delta^n f_0$$

و چند جمله ای درون یاب تابع f به فرم زیر است:

$$P(x) = f_0 + 0\Delta f_0 + \frac{0(0-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + ... + \frac{0(0-1)(0-2)...(0-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

فرمول چند جمله ای درون یاب تفاضلات پیشرو و نیوتن

$$0 = \frac{x - x_0}{h}$$

از فرمول فوق وقتی استفاده می کنیم که بخواهیم $f(x)$ را در نقطه ای که مجـاور نقاط ابتدای جدول است تخمین زنیم عملگر دیگری به نام عملگر تفاضلات پـس رو با نماد ∇ (دیل) که به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$
$$\nabla^n f_i = \nabla(\nabla^{n-1} f_i) = \nabla^{n-1} f_i - \nabla^{n-1} f_{i-1}$$

قضیه فوق در این حالت به شکل زیر خواند بود.

قضیه- برای نقاط متساوی الفاصله $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ فرمول تفاضلات پسرو نیوتن به شکل زیر است:

$$P(n) = f_n + 0\nabla f_n + \frac{0(0+1)}{2!}\Delta^2 f_n + ... + \frac{0(0+1)(0+2)...(0+n-1)}{n!}\nabla f$$

$$: 0\frac{x - x_n}{h}$$

توجه: از فرمول تفاضلات پسرو برای تخمین زدن $f(x)$ در نقاط مجاور انتهای جدول استفاده می‌شود.

ارتباط عملگر Δ, ∇ :

$$(4) \quad \Delta\nabla = \nabla\Delta$$

$$(5) \quad \Delta f_i = \nabla f_{i+1}$$

$$(6) \quad \Delta^n f_i = \nabla^k f_{i+k}$$

- مثال: چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به کمک تفاضلات پیش رو به دست آورید:

x_i	-2	-1	0	1
f_i	3	1	1	3

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-2	3			
-1	1	1-3=-2	0-(-2)=2	2-2=0
0	1	1-1=0	2-0=2	

1	3	3-1=2		

تفاضلات پیش رو: $p(x)=3+0(-2)+\frac{0(0-1)}{2!}(2)+\frac{0(0-1)(0-2)}{3!}\times 0$

$$0=\frac{x-x_0}{n}=x-(-2)=x+2$$

$$P(x)=3-2(x+2)+(x+2)(x+1)$$

$$P(x)=3-2x-4+x^2+3x+2$$

$$P(x)=x^2+x+1$$

- مثال چند جمله درون یاب تابع جدولی زیر را به روش تفاضلات پسرو پیدا کنید.

x_i	0	1	2	3
f_i	0	1	0	-3

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0	0			
1	1	1-1=0	0-(-2)=2	2-(-2)=0
2	0	0-1=	2-0=2	
3	-3	3-1=2		

$$P(x) = -3 + 0(-3) + \frac{0(0+1)}{2!}(-2) + \frac{0(0+1)(0+2)}{3!} \times 0$$

$$0 = \frac{x-3}{1} = x-3$$

$$P(x) = -3 - 3(x-3) - (x-3)(x-2) + 0$$

$$P(x) = -3 - 3x + +9 - x^2 - x^2 + 5x - 6$$

$$P(x) - x^2 + 2x$$

نکته- سوالی که مطرح می شود این است که محاسبه $p(x)$ به کدام روش مفیدتر است. جواب آن است که چون $0 = \frac{x - x_i}{h}$ لذا x_i را چنان اختیار می کنیم که $|0|$ کمترین مقدار را داشته باشد (یعنی x_i را آن نقطه از جدول می گیریم که کمترین فاصله را تا x داشته باشد.)

- مثال: جدول زیر مربوط به $f(x) = \sin x$ است برای x های صفر درجه 10° و 20°، و ... و 50° مطلوبست برآورد (تخمین) $Sin5^\circ$ با استفاده از چند جمله ای درون یاب.

x	0	10	20	30	40	50
f_i	0	0/1736	0/3420	0/5	0/6428	0/7660

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0	0			
10	0/1736	0/1736		
20	0/3420	0/1684	-0/0052	-0/0052
30	0/5	0/1580	-0/0104	
40	0/6428	0/1428	-0/0152	-0/0048
50	0/660	0/1232	-0/0196	-0/0044

	$\Delta^5 f_i$
0/0004	0
0/0004	

$$P(x)=\sin 5^\circ$$

چون از ما چند جمله خواسته نشده پس می توانیم به طور مستقیم بنویسیم:

$$p(5)$$

$$0=\frac{x-x_0}{10}=\frac{5-0}{10}=\frac{1}{2}$$

$$f(5)=0+\frac{1}{2}(0/1736)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{21}(-0/0052)+$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1-2)\right)}{3!}(0/0052)+\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}(0/0004)+0=0/0871$$

- مثال: تابع $f(x) = Sinx$ را با استفاده از نقاط $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ درون یابی کرده و مقدار $\sin 37^\circ$ و $40'$ و $15''$ را برآورد کنید. (پیشرو)

-

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0	0			
$\frac{\pi}{6}$	0/5			
		0/5		
$\frac{\pi}{3}$	0/866025			
		0/366025	-0/133975	-0/098075
		0/133975	-0/232050	
$\frac{\pi}{2}$	1			

$$0=\frac{x}{\frac{\pi}{6}}=\frac{6x}{\pi}$$

$$P(x)=0+\frac{6x}{\pi}(0/5)+\frac{\frac{\pi}{6}\left(\frac{6x}{\pi}-1\right)}{2!}(-0/133975)+$$

$$\frac{\frac{66}{\pi}\left(\frac{6x}{\pi}-1\right)\left(\frac{6x}{\pi-20}\right)}{3!}-(0/098075)=$$

$$37^\circ,40',15''=37+\frac{40}{60}+\frac{15}{3600}=37+\frac{2}{3}+\frac{1}{240}$$

$$=\frac{8880+160+1}{240}=\frac{9041}{240}=37/680833^\circ$$

باید به رادیان تبدیل شود $\xrightarrow{\times\frac{\pi}{180}} 0/6574800\,Rad$

$$P(0/65748)=\frac{6(0/65748}{\pi}(0/5)+\frac{\frac{6(0/65748)}{\pi}\left(\frac{6(0/65748}{\pi}-1\right)}{2}$$

$$(-0/133975)+\frac{\left(\frac{6(0/65748}{\pi}\right)\left(\frac{6(0/65748)}{\pi}-1\right)\left(\frac{6(0/65748)}{\pi}-2\right)}{3!}$$

x_i	f_i	Δf_i
x_0	f_0	
x_1	f_1	Δf_0
x_2	f_2	Δf_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-2}	f_{n-2}	
x_{n-1}	f_{n-1}	Δf_{n-2}
x_n	f_n	Δf_{n-1}

x_i	f_i	Δf_i
x_0	f_0	
x_1	f_1	Δf_0
x_2	f_2	Δf_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-2}	f_{n-2}	
x_{n-1}	f_{n-1}	Δf_{n-1}
x_n	f_n	Δf_8

تمرین-

به کمک روش لانگرانژ محاسبه کنید:

۸) فرض کنید $f(x_0)=f_0$, $f(x_1)=f_1$ مطلوبست چند جمله ای درون یاب

f و با استفاده از آن تخمینی از $f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$

۹) چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به دست آورده و با استفاده از

$f\left(\frac{-1}{2}\right), f\left(\frac{3}{2}\right)$ را بیابید.

x_i	-1	0	1	2
f_1	-2	-1	0	7

جواب $P(x)=x^3-1$

۱۰) با استفاده از تفاضلات تقسیم شده نیوتن چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به دست آورده آیا با افزودن نقطه $(2,1)$ چند جمله ای درون یاب تغییر می‌کند.

x_i	-1	0	1
f_i	1	-1	-1

۱۱) درجه چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

(روش تفاضلات تقسیم شده)

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	3	2	7	24	59	118

راهنمایی: درجه چند جمله ای درون یاب بزرگترین مرتبه تفاضلات تقسیم شده مخالف صفر است.

۱۲) چند جمله ای درون یاب تابع $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$ را در نقاط $x_1=0, x_0=0$ یافته و برای $|f(x)-p(x)|$ کران بالایی بیابید، سپس مقدار $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-p\left(\frac{1}{2}\right)\right|$ را با کران بالا در $x=\frac{1}{2}$ مقایسه کنید.

۱۳) تفاضلات متناهی - فرض کنید $g(x_i)=g_i\,, f(x_i)=f_i$ برای 33 $i=0,1,\ldots,4$ و $x_i=x_0+ih$ ثابت کنید:

$$\Delta(\alpha f_i+\beta g_i)=\alpha\Delta f_i+\beta\Delta g_i$$

$$\Delta(f_i g_i)=f_i\Delta g_i+g_{i+1}\,\Delta f_i$$

$$\Delta\left(\frac{f_i}{g_i}\right)=\frac{g_i\Delta f_i-f_i\Delta g_i}{g_i\,g_{i+1}}$$

۱۴) با استفاده از روش تفاضلات پیشرو چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را بیابید.

x_i	1	2	3	4
f_i	2	5	10	17

جواب: $p(x)=x^2+1$

۸) چند جمله ای درون یاب تابع جدولی تمرین قبل را بر اساس نقطه x_1 پیدا کنید.

۹) مطلوبست محاسبه $f[1,2,3]$ برای تابع جدولی زیر:

x_i	-1	1	2	2
f_i	-1/2	3/2	1/ 2	31/2

الف) ۴ ب) ۱۲

ج) ۱۶ د) هیچکدام

تمرین از صفحه ۵۳-

$Cos60^{\circ} = 0/5$

$Cos95^{\circ} = 0/7071$

$Cos50^{\circ} = ?$

x_i	45	60
f_i	0/7071	0/5

$$P(x) = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x)$$

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-45}{60-45} = \frac{x-45}{-15}$$

$$l_1 = \frac{x - x_0}{x - x_0} = \frac{x-60}{45-60} = \frac{x-60}{-15}$$

$$\Rightarrow p(x) = 0/7071\left(\frac{x-45}{15}\right) + 0/5\left(\frac{x-60}{15}\right)$$

$$\Rightarrow p(50) = 0/638066$$

x_i	1	4
f_i	1	2

$y=\sqrt{x}$ $\quad$ $x_0=1$

$x_1 4$

$$p(x)=l_0 l_0(x)+f_1 l_1(x)$$

$$L_0(x)=\frac{x-x_0}{x_0-x_1}=\frac{x-4}{1-4}=\frac{x-4}{-3}$$

$$L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{x-1}{4-1}=\frac{x-1}{3}$$

$$\Rightarrow p(x)=1\frac{(x-4)}{-3}+4\left(\frac{x-1}{3}\right)$$

$$x=2 \Rightarrow\left(\frac{2-4}{-3}\right)+\left(\frac{2-1}{3}\right)$$

$x=3 \quad P(3)$

تمرین (۲) از مسئله

x_i	-1	0	1	2
f_i	-2	-1	0	6

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-1	-2			
		-1+2=1		
0	-1		1-1=0	
		0+1=1		6-0=6
1	0		7-1=6	
		7-0=7		
2	7			

$$p(x) = f_n + 0\Delta f_0 + \frac{0(0-1)}{2!}\Delta^2 f_1 + \frac{0+(0-2)(0-1)}{3!}\Delta^3 f_2$$

$$p(x) = -2 + 0(1) + \frac{0(0-1)}{2!}(0) + \frac{(0-2)(0-1)}{3!}\Delta^3 f_2$$

$$0 = \frac{x-x_0}{h} = x+1$$

$$p(x) = -2 + x + 1 + (x-1)x$$

$$p(x) = x + 2 + (x^2 - 1)x \Rightarrow p(x) = x^3 - 1$$

x_i	x_0	x_1
f_i	f_0	f_1

$$p(x) = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x)$$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

$$l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$p(x)=l_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+f_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\simeq p\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f_1\frac{\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)-x_1}{x_0-x_1}+f_1\frac{\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)-x_0}{x_1-x_0}$$

$$=f_0\frac{\frac{x_0+x_1-2x_1}{2}}{x_0-x_1}+f_1\frac{\frac{x_0+x_1-2x_0}{2}}{x_1-x_0}$$

$$=f_0\frac{\frac{x_0-x_1}{2}}{x_0-x_1}+f_1\frac{\frac{x_1-x_0}{2}}{x_1-x_0}=f_0\frac{1}{2}+f_1\frac{1}{2}$$

$$=\frac{f_0+f_1}{2}$$

تمرین (۳)-

x_i	-1	0	1
f_i	1	-1	-1

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_i +$	
-1	1			چون تفاضل مرتبه سوم
0	-1	$\frac{1-(-1)}{-1-0}=-2$		صفر شده پس درجه
1	-1	$\frac{-1-(-1)}{0-1}=0$	$\frac{-2-0}{-1-1}=+1$	چند جمله ای ۰=۱-۱
			$\frac{0-2}{02}=1$	تغییر نمی کند همچنین
	1	$\frac{-1-1}{1-2}=2$		با امتحان معلوم می
				شودکه:

$$p(x)=f_0+(x-x_0)f(x,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_1]$$

$$=1+(a-(-1)(-2)+(x-(-1)(x-0)=$$
$$=x^2-x-1$$
$$f(2)=4-2-1=1$$

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_i + 2]$	مرتبه سوم
0	3		$\frac{-1-5}{3-2}=+3$	
1	2	$\frac{3-2}{0-1}=-1$		

2	7	$\frac{2-7}{1-2}=5$		
3	24	$\frac{7-24}{2-3}=17$	$\frac{5-17}{1-3}=6$	$\frac{3-6}{4-3}=1$
4	59	$\frac{24-59}{3-4}=-35$	$\frac{17-35}{2-4}=9$	$\frac{6-9}{1-4}=1$
5	118	$\frac{59-118}{4-5}=59$	$\frac{85-59}{3-5}=+12$	$\frac{9-12}{2-5}=1$

مرتبه پنجم	مرتبه چهارم
0	$\frac{1-1}{6-4}=0$
	$\frac{1-1}{1-5}=0$

با توجه به راهنمایی مرتبه سوم: درجه سوم = $p(x)$

تمرین۵-

x_i	0	1
f_i	1	0

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$
0	1	$\frac{0-1}{1-0} = -1$
1	0	

$$p(x) = f_0 + (x - x_0) f[x_i + x_{i+1}]$$
$$p(x) = 1 + (1-0)(1-1) \to p(x) = 1 - x$$

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - p\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \cos\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \right|$$
$$= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = 0/21$$

$$f'(x) = \left(-\sin\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi}{2}$$

$$f''(x) = \left(-\cos\frac{\pi}{2}x\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$|f''(x)| = \left|-\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right| \le \frac{\pi^2}{4}$$

$$|f(x)-p(x)| \le \frac{|(x-0)(x-1))|}{2!}\times\frac{\pi^2}{4}$$

$$|f(x)-p(x)| \le \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|}{(n+1)!}\times\frac{\pi^2}{4}$$

$$=(x^2-x)\frac{\pi^2}{8}$$

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-p\left(\frac{1}{2}\right)\le\left|\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right|\frac{\pi^2}{8}\right.$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{32}\simeq 0/31$$

اختلاف با مقدار واقعی : 0/31-0/21=0/1

بنابراین خطای چند جمله ای درجه اول تقریب مناسبی برای $\cos\frac{\pi}{2}$ نیست.

تمرین ۶-

تعریف: $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$

ثابت کنید: $\Delta(\alpha f_i + \beta g_i) = \alpha\Delta(f_i) + \beta(g_{i+1} - g_i)$ (۱)

$$=(\alpha f_{i+1}+\beta g_{i+1})-(\alpha f_i+\beta g_i)$$

$$=\alpha(f_{i+1}+f_i)+\beta(g_{i+1}-g_i)$$

$$=\alpha\Delta(f_i)+\beta\Delta(g_i)$$

(۲) ثابت کنید : $\Delta(f_i\times g_i)=f_i\Delta g_i+g_{i+1}f_i\Delta$

$$\Delta(f_i\times g_i)=(f_{i+1}\times g_{i+1})-(f_i\times g_i)$$

طرف دوم تساوی: $f_i\Delta g_i+g_{i+1}\Delta f_i$

$$=f_i(g_{i+1}-g_i)+g_{i+1}(f_{i+1}-f_i)-f_i g_{i+1}+$$
$$g_{i+1}f_{i+1}-g_{i+1}f_i$$

(۲) $f_{i+1}+g_{i+1}-f_i g_i$

(۱) و (۲) $\Delta\left(\frac{f_i}{g_i}\right)=\dfrac{g_i\Delta f_i-f_i\Delta f_i}{g_i g_{i+1}}$

(۳) ثابت $\Delta\left(\frac{f_{i+1}}{g_{i+1}}\right)-\left(\frac{f_i}{g_i}\right)$

$$\Delta\frac{f_i}{g_i}=\left(\frac{f_{i+1}}{g_{i+1}}\right)-\left(\frac{f_i}{g_i}\right)$$

$$\frac{g_i\Delta f_i - f_i\Delta g_i}{g_i g_{i+1}} = \frac{g_i(f_{i+1}-f_i) - f_i(g_{i+1}-g_i)}{g_i g_{i+1}}$$

$$= \frac{g_i f_{i+1} - g_i f_i - f_i g_{i+1} + 1 + f_i g_{i)}}{g_i g_{i+1}} \Rightarrow \frac{f_{i+1}}{g_{i+1}} - \frac{f_i}{g_i}$$

تمرین (۷)

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
1	2			
		5-2=3		
2	5		5-3=2	
		10-5=5		2-2=0
3	10		7-5=2	
		17-10=7		
4	17			

$$p(x) = f_0 + 0\Delta f_0 + \frac{0(0-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{0(0-1)(0-2)}{n!}\times\Delta^n f_0$$

$$p(x) = 2 + 30 + \frac{0(0-1)}{2!}\times 2 + \frac{0(0-1)(0-2)}{3!}\times 0$$

$$h = x_{i+1} - x_i = 1, 0 = \frac{x - x_0}{n} = x - 1$$

$$p(x) = 2 + 3x + 3 + (x-1)(x-2)$$

$$= 2 + 3x - 3 + (x^2 - 2x + 2)$$

$$= x^2 + 1$$

تمرین ۸)

ادامه مسأله قبلی

$$p(x) = f_1 + 0\Delta f_1 + \frac{0(0+1)}{2!}\Delta^2 f_1 + ... + \frac{0(0-1)(0-2)....}{hi} \times \Delta^n f_1$$

$$p(x) = 5 + 50 + \frac{0(0-1)}{2!} \times 2$$

$$h = x_{i+1} - x_i = 1 \ , \ 0 = \frac{x - x_1}{h} = x - 2$$

$$p(x) = 5 + 5x - 10 + (x-2)(x-3)$$

$$= 0 + 5x - 10 - 1 + x^2 - 5x + 6 = x^2 + 1$$

تمرین ۹)

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_i + 2]$
-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=1$	
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}$	$\frac{\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}=-\frac{3}{4}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{32}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}$	$\frac{\frac{15}{2}+\frac{1}{2}}{2}=4$
3	$\frac{3}{2}$		$f[x_1 + x_2, x_3] = 4$

انتگرال گیری عددی:

می دانید انتگرالهایی وجود دارد که در آنها تابع زیر انتگرال تابع اولیه ندارند مانند:

$$\int \frac{\sin x}{x} \qquad \int Cosx^2 dx$$

$$\int e^{x^2} dx$$

در عمل معمولا انتگرالهای معین مورد نظر ما هستند.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad , \quad \int_{-2}^{2} \cos x^2 dx \quad , \quad \int_0^{\pi} e^{x^2} dx$$

در این قسمت روش هایی ارائه می دهیم که انتگرالهای فوق را با هر تقریب دلخواه بتوانیم تخمین بزنیم.

قاعده ذوزنقه ای:

در این روش فاصله a تا b را به n قسمت مساوی تقسیم کرده و در هر جز فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ به جای تابع f ی خط یعنی چند جمله ای درون یاب درجه اول تابع f را در نقاط x_i, x_{i+1} قرار می دهیم معادله خط عبارتند از:

$$P(x) = f_i + 0\Delta f_1 \quad : 0 = \frac{x - x_i}{h}$$

مساحت ذوزنقه I ام برابر است با:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx = (f_i + f_{i+1}) = (f_i + f_{i+1})\frac{h}{2} = s_i$$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{h}$$

بنابراین $\int_a^b f(x)dx$ یعنی سطح کلی زیر منحنی برابر است با:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_x^{x1} f + \int_{x_1}^{x2} f + ... + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n = b}$$ بیان

اگر به صورت $\sum$ بیان شود $\rightarrow \sum_{i=x}^{x-1} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx$

$$= \sum_{i=0}^{h-1} \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

$$\rightarrow \frac{h}{2}((f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + (f_2 + f_3) + (f_3 + f_4) + ... + (f_{n-1} + f_n)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{n}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + ... + 2f_{n-1} + f_n) = T(h)$$

محاسبه خطای قاعده ذوزنقه:

قضیه- فرض کنیم تابع f', f'' بر $[a.b]$ موجود و پیوسته اند در این صورت ثابت می شود که مقدار خطای قاعده ذوزنقه ای برابر است با:

$$ET(h)=\int_a^b f(x)dx-T(h)=\frac{(b-a)h^2}{12}f''(C)$$

عملا یافتن C ممکن نیست پس از فرمول فوق نمی توان استفاده کرد اما اگر بتوانیم برای $|f''(c)|$ ران بالایی پیدا می کنیم آن گاه خواهیم داشت،

$$\forall x\in[a,b],|f''(x)|\le M\Rightarrow|ET(h)|=\frac{(b-a)h^2}{12}f''(C)|\le \frac{(b-a)h^2}{12}M$$

بنابراین اگر بخواهیم مقدار $\int_a^b f(x)dx$ را با خطای کمتر از ε محاسبه کنیم کافی است:

$$\frac{(b-a)h^2}{12}M\le\varepsilon$$

یعنی h را چنان پیدا می کنیم که $\frac{(b-a)h^2}{12}M\le\varepsilon$

واضح است که هر چه خطا کمتر باشد n بیشتر است.

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر به روش ذوزنقه با تقریب کمتر از 10^{-8}

$$\int_0^2\cos x dx$$

$$f(x)=\cos x$$
$$f'(x)=-\sin x$$
$$f'(x)=-\cos x$$

$$|f''(x)| = |-\cos x| \le 1 = M$$

$$|ET(h)| = \left| \frac{(b-a)h^2}{12} f''(C) \right| \le \frac{3-0}{12} h^2 \times 1 = \frac{h^2}{4}$$

$$h^2 \le 4\times 10^{-8} \to h \le 2\times 10^{-4} \quad : \frac{h^2}{4} \le 10^{-4}$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} \Rightarrow \frac{3}{n} \Rightarrow 2\times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow n \ge \frac{3}{2\times 10^{-4}} = \frac{3}{2}\times 10^4 = 15000$$

یعنی مقدار تقریبی انتگرال فوق را به روش ذوزنقه با تقریب کمتر از 10^{-8} اگر بخواهیم حساب کنیم باید مقدار تابع فوق را در ۱۵۰۰۱ نقطه حساب کنیم.

مثال- تقریبی از $\int_0^1 x^2 dx$ را به روش ذوزنقه ای به ازا $h=1, h=\frac{1}{2}, h=\frac{1}{4}$ حساب کنید و خطای آنها را نیز در هر حالت محاسبه نمایید.

$$\int_a^b f(x)dx \simeq T(h) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

$$T(b) = T(1) = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) = \frac{1}{2}\left(f_{(0)} + f_{(1)}\right) = \frac{1}{2}(0+1^2) = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \ , \ b = 1$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n}$$

$$h = 1 = \frac{1}{n} = n = 1$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + f_2) = \frac{\frac{1}{2}}{2}\left(0 + 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2\right) = \frac{3}{8}$$

$$h = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} = \frac{1}{n} \Rightarrow n = 2$$

$$T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{n}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) = \frac{\frac{1}{4}}{2}\left(0 + 2\times\frac{1}{16} + 2\times\frac{9}{16} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{9}{8} + 1\right) = \frac{1}{8}\times\frac{1+4+9+8}{8} = \frac{22}{64} + 1$$

حالت اول برای محاسبه خطا= $\left|\int_0^1 x^2 - T(h)\right| \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{6}$

حالت دوم= $\left|\frac{1}{3} - \frac{3}{8}\right| = \frac{1}{24}$

حالت سوم= $\left|\frac{1}{3} - \frac{11}{32}\right| = \frac{1}{96}$

یعنی تعداد خطا متناسب است با h^2

تمرین-

(۱) با استفاده از جدول زیر مطلوبست محاسبه $\int_a^1 f(x)dx$ (تا چهار رقم اعشار)

x_i	0	0/2	0/4	0/6	0/8	1
f_i	0	1/221 4	1/491 8	1/822 1	2/225 5	2/718 3

میزان خطا را نیز حساب کنید (با توجه به مقدار واقعی اعداد جدول فوق را به تابع

e^x مربوط است)

قاعده سیسمون:

همان طور که دیدید قاعده ذوزنقه بسیار کند است و تابع را باید در نقاط بسیاری محاسبه کرد.

اما روش سیسمون ساده تر و دقیق تر بوده و بر اساس جایگزین کردن یک چند جمله ای درجه دوم به جای $[x_i, x_{i+1}]$ چنین به دست می آید:

به دست می آوریم:

$$P(x) = f_i + 0\Delta f_i + \frac{0(0-1)}{2!}\Delta^2 f_i \qquad 0 = \frac{x_i - x_i}{h}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_i + \Sigma f_{i+1} + f_{i+2}\right)$$

برای محاسبه تقریبی $\int_a^b f(x)dx$ به قاعده سیسمون باید بازده $[a, b]$ را به تعداد زوج بازده تقسیم می کنیم. بنابراین فرض می کنیم n زوج باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}(f_0 + \sum f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + \sum f_4 + f_3)$$

تمرین- به کمک روش دو بخشی تقریبی ریشه معادلات زیر را بیابید هرگاه:

الف) $x - 0/2Sinx - 0/5 = 0 \quad 0 = 0/5, b = 1, \varepsilon = 10^{-3}$

ب) $x - 2^{-x} = 0 \quad a = 0, b = 1, \varepsilon = 10^{-5}$

ج) $e^x - x^2 - 3x - 2 = 0 \quad a = 0, b = 1, \varepsilon = 10^{-5}$

پس از چند بار تکرار به ریشه تقریبی معادلات زیر می نویسیم:

$$x^3 + x - 1 = 0 \qquad a = 0, b = 1, \varepsilon = 10^{-2}$$

$$Sinx - \frac{x}{2} = 0 \qquad a = 1, b = 2, \varepsilon = 10^{-2}$$

روش وتری (جابجائی):

پس از آزمون سه محدودیت ذکر شده در ابتدای این فصل: این روش مشابه به روش دو بخش است، با این تفاوت که در فلوچارت روش دو بخشی به جای

$c = \frac{a+b}{2}$ چنین قرار می دهیم $c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$

معیار توقف: عیناً معیار توقف در روش دو بخشی است.

توجه- معمولاً این روش سریعتر از روش دو بخشی است.

- مثال: با استفاده از روش جابجائی یا وتری معادله $x^3+x-1=0$ را با تقریب $\varepsilon=0/001$ بیابید:

$f(x)=x^3+x-1$ $\qquad f:[0,1]$ پیوسته $\qquad (2)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1<0 \\ f(1)=1>0 \end{array}\right\}(1) \qquad f'(x)=3x^2+1>0:[0,1] \quad (3)$$

$$C=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

A	B	$C=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	F(c)
0	1	0/5	-0/375
0/5	1	0/6364	-0/1059
0/6364	1	0/6712	-0/0264
0/6712	1	0/6797	-0/00064
0/6797	1	0/6817	-0/0015
0/66817	1	0/6822	-0/0004 $\rightarrow \lvert -0/0004 \rvert = 0/0004 < 0/001$ $C=0/6822 \simeq 0/682$

تمرین- (۱) تقریبی از ریشه های معادلات زیر را به روش وتری بیابید:

5) $\quad x+\cos x \qquad \varepsilon=10^{-2}$

6) $x^2 - 2^x = 0 \qquad \varepsilon = 10^{-2}$

7) $3xe^e = 1 \qquad a = 0/25 \qquad b = 0/75 \qquad \varepsilon = 10^{-2}$

$\Rightarrow 3x - e^x = 0$

8) $2\sin x + x - 2 = 0 \qquad a = 0/6 \qquad b = 0/8 \qquad \varepsilon = 10^{-3}$

تمرین- (۲) نمودار جریان روش وتری را در حالتی که شرط توقف

$|c_n - c_{n-1}| < \varepsilon$ باشد رسم کنید.

تکرار ساده (نقطه ثابت):

در این روش پس از بررسی سه محدودیت ذکر شده در ابتدای فصل معادله

$f(x) = 0$ را به فرم $x = g(n)$ در می آوریم. و پس از انتخاب $g(n)$ مناسب

دنباله $x_n = g\begin{pmatrix} x \\ n-1 \end{pmatrix}$ دنباله این ما را به ریشه ها هدایت می کند (با انتخاب

یـــک

x_0 تقریبی بین a و b)

برای تشخیص $g(x)$ مناسب قضیه زیر را داریم:

قضیه- اگر g تابعی بر $[a,b]$ باشد (یعنی $a \le x \le b$ و $a \le g(n) \le b$ باشد و

برای هر x از $\varepsilon[a,b]$ داشته باشیم:

$|g'(x)| \le L < 1$ ، در این صورت:

۵) معادله $x=g(x)$ تنها یک ریشه بین a و b دارد.

۶) برای هر x_0 بین a,b دنباله $x_n=g\begin{pmatrix}n\\n-1\end{pmatrix}$ به تنها ریشه حقیقی معادله $x=g(x)$ همگراست.

توجه-۱) هر چند L به صفر نزدیکتر باشد سرعت همگرایی بیشتر است. (زودتر به ریشه می رسیم) و هر چند L به یک نزدیکتر باشد سرعت همگرایی کندتر است.

۲) اگر ۱ یا هر دو شرط قضیه فوق برقرار نباشد نتیجه نمی شود که دنباله $x_n=g\begin{pmatrix}x\\n-1\end{pmatrix}$ همگرا نیست بلکه توصیه می‌شود از این $g(x)$ بنویسید.

$$f(x)=x^3+x-1=0$$
$$x=1-x^3=g_1(x)$$
$$x(x^2+1)=1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{x^2+1}=g_2$$
$$x^3=1-x \Rightarrow x=\sqrt[3]{1-x}.g_3(x)$$

مثال ۲: در فاصله $[0,1]$ کدام یک از $g(x)$ های فوق مناسبند؟

$$[0,1] \quad x=1-x^3=g_1(x)$$

$$0\le x\le 1 \Rightarrow 0\le x^3\le 1$$

$$-1\le -x^3\le 0$$
$$0\le 1-x^3\le 1$$
$$0\le g_1(x)\le 1$$

$$\forall x \varepsilon (0,1) \qquad |g'(x)| = |-3x^2| 3x^2$$

$$\forall x \varepsilon (0,1) \quad , x = \frac{2}{3} \to 3(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{3} > 1$$

پس شرط دوم قضیه فوق در مورد g_1 برقرار نیست پس g به دست آمـده ممکـن است مناسب نباشد.

$$x = \frac{1}{x^2+1} = g_2(x)$$

شرط اول

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow x^2 + 1 \le 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x^2+1} \le 1 \Rightarrow 0 \le g_2(x) \le 1$$

$$g_2'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow |g_2'(x)| = \frac{2|x|}{(x^2+1)^2} < 1$$

شرط دوم

پس g_2 مناسب است.

تمرین- آیا g_3 مناسب است؟

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{x_{n-1}+1}}$$

$x_0 = 0/75$ انتخاب می کنیم.

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{0/75+1}} = 0/75593$$

$$x_1 = \frac{1}{0/75+1} = 0/75493$$

$$x_4 = \frac{1}{\sqrt{0/75493+1}} = 0/75489$$

تفاضل با قبـل بایـد 0/0001 باشد.

کمتر از

شرط خاتمه عملیات: $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

تمرین- به روش تکرار ساده (نقطه ثابت) تقریبی از ریشه معادلات زیر را چنان بیابید که $\varepsilon = 0/001$ باشد.

2) $x - \cos x = 0$ $\quad a = 0/5 \quad b = 1 \quad x_0 = 0/75$

7) $2x - 1 - 2\sin x = 0$ $\quad x_0 = 1$

8) $x + \ln x = 0$ $\quad x_0 = 1$

می دانیم معادله $e^x - 3x^2 = 0$ سه ریشه در فاصله ¾ , $0/1$, $-1/0$ دارد، $g(x)$ های مناسبی جهت محاسبه تقریبی ریشه های معادله فوق بیابید که $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-3}$ باشد.

$$x^3 + x - 1 = 0$$

$$x(x^2 + 1) = 1$$

$$x = \frac{1}{x^2 + 1} = g(x) \rightarrow x_n = g(x_{n-1})$$

$$x_3 = \dots$$

توجه- مجموعه ریشه های معادله $f(x) = 0$ با مجموعه ریشه های معادله $x = f(x)$ یکسان نیست.

- مثال: بااستفاده از روش نقطه ثابت ریشه معادله $x^3 + x^2 - 1 = 0$ با تقریب $0/0001$ به دست آورید.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 1 = 0$$
$$a = 0 \rightarrow f(0) = -1 < 0$$
$$b = 1 \rightarrow f(1) = 1 > 0$$

$f:[0,1]$ پیوسته

$f(x)=3x^2+2x>0 \rightarrow f$ اکیداً صعودی $x\varepsilon(0,1)$

پس $f(x)=0$ در $[0,1]$ فقط یک ریشه دارد.

$$x^3+x^2-1=0$$

$$x^2(x+1)=1$$

$$x^2=\frac{1}{x^2+1}$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{x+1}}=g(x) \qquad 1)\ 0\le x\le 1 \rightarrow 0\le g(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}\le 1$$

$$2)\ g'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=-\frac{1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}<1$$

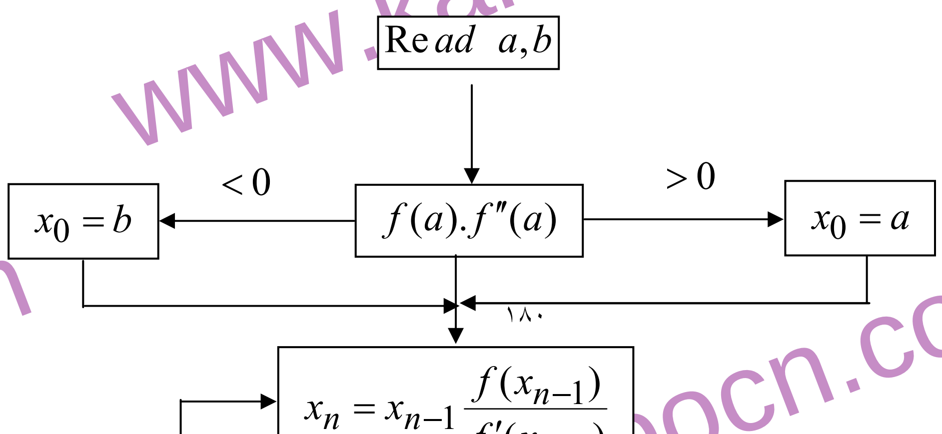
$$0<x<1$$

روش نیوتن رافسون یا روش مماس:

شرط استفاده از این روش آن است که علاوه بر سه شرط ابتدائی $f''(x)$ بر $[a,b]$ تغییر علامت ندهد.

توجه- نقطه مناسب برای شروع مانند x_0 به طوری که $f(x_0).f''(x)>0$

$$x_n=x_{n-1}\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_n-1)}$$



$\downarrow$

- مثال: مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ را بیابید (روش نیوتن رافسون):

$$d = \sqrt{2} \rightarrow d^2 = 2 \rightarrow d^2 - 2 = 0$$

معادله $f(x) = x^2 - 2 = 0$ را در نظر بگیرید، مثل این است که بخواهیم ریشه مثبت معادله را پیدا کنیم:

$$\left.\begin{array}{ll} a=1 & f(1)=1-2<0 \\ b=2 & f(2)=4-2=2>0 \\ f:[1,2] & \text{پیوسته} \\ f'(x=2x>0 & \forall x\varepsilon[1,2] \\ f''(x)=2>0 & \forall x\varepsilon[1,2] \end{array}\right\} \quad 1,2 \text{ فقط یک ریشه بین}$$

پس می توان از روش نیوتن استفاده کرد.

نقطه شروع: $x_0 = 1 \rightarrow f(x) = 1 - 2 = -1$

$$f''(2) = 2 \rightarrow f(1).f''(1) < 0 \rightarrow x_0 = 2$$

نقطه شروع: $x_0 = 2 \rightarrow f(2) = 2$

$$f''(2) > 0 \rightarrow f(2).f''(2) > 0 + x_0 = 2$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$x_0 = 2 \rightarrow x_1 = 2 - \frac{4-2}{2\times 2} = 2 - \frac{1}{2} = 1/5$$

$$x_2 = 1.5 - \frac{2/25-2}{2\times 1/5} = 1/5 - \frac{0/25}{3} = 1/41666...$$

$$= 1/4167$$

$$x_3 = 1/4167 - \frac{2/007-2}{2\times 1/4167} = 1/4142$$

$$f(x_3) = f(1/4142) = \frac{2/007-2}{2\times 14167} = 1/4142$$

$$f(x_3) = 0/000004 < 0/001$$

پس:

$$X_3 = 1/414$$

توجه- هرگاه α ریشه تکراری (مکرر) مرتبه m ام معادله $f(x)=0$ باشد در این صورت از فرمول $x_n = x_{n-1} - m\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ استفاده می کنیم. تا همگرایی سریعتر گردد.

تعریف ریشه مکرر مرتبه m ام معادله $f(x)=0$

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = ... = f^{m-1}(\alpha) =$$

α را ریشه مکرر گویند هرگاه $f(x)=0$ به صورت بالا باشد.

تمرین- با استفاده از روش نیوتن رافسون ریشه تقریبی معادلات زیر را بیابید. (تا ۴ رقم اعشار)

۱) $x - \sin x = 0$ ۲) $x^3 - 4 = 0$

۳) $3xe^x - 1 = 0$ ۴) $Sin - \frac{x}{2} = 0$

ثابت کنید $\alpha = 0$ ریشه تکراری مرحله چهارم معادله $x^2 + 2\cos x - 2 = 0$

سپس به روش نیوتن و با قراردادن $x_0 = 0/5$ این ریشه را بیابید.

تمرینات گوناگون:

۶) با استفاده از روش ترسیمی معادله $x = 10\cos x$ چند ریشه دارد؟ (معادله $x = 100\cos x$ سوال امتحان) چند ریشه مثبت دارد.

۷) تعداد ریشه های معادله $x + 1.\cos x = x\sin x$ را به روش ترسیمی معلوم کنید. این ریشه ها نزدیک چه اعدادی هستند؟

۸) معادلات زیر چند ریشه حقیقی دارند؟

الف) $x^3 + x + 1 = 0$ ب) $x^x - 4 = 0$

ج) $x = \tan x$ د) $x\cos x = \sin x$

ر) $x^3 - 2x^2 + 3x + 7 = 0$ ز) $x^3 - (1-x)^7 = 0$

۹) کوچکترین ریشه معادله $\tan x - \cos x = \frac{1}{2}$ را به روش وتری به ازاء $a = 0/5$ ، $b = 1$ چنان بیابید که $\varepsilon = 10^{-5}$

۱۰) فرض کنید $x_{n+1} = \frac{x_n^k + Kax_n}{K_{x_n}^{k-1} + x}$ به عددی غیر هم صفر همگراست.

الف. K را چنان بیابید که مرتبه همگرایی دنباله حداقل ۲ باشد ریشه مکرر حداقل ۲ باشد، $(f'(\alpha)=0)$

تمرین های گذشته:

سه رقم اعشار گرد کنید:

$$\frac{\pi}{3\sqrt{5}} \quad , \quad \varepsilon$$

$$\frac{\pi}{3\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\frac{\pi\sqrt{5}}{\sqrt{15}}=7.0251\frac{1}{15}=0.4683674\simeq 0.468$$

$\pi\simeq 3.142$ $\qquad E=0.5\times 10^{-3}$

$\sqrt{6}\simeq 2.236$ $\qquad E_{\pi}=0.5\times 10^{-3}$

$\frac{1}{15}\simeq 0.067$ $\qquad E_{\sqrt{5}}=0.5\times 10^{-3}$

$$E_{\sqrt{5}}=0.5\times 10^{-3}$$

گرد کردن:

$$E\le 3.142\times 2.236\times E_{\frac{1}{15}}+3.142\times 0.067\times E_{\sqrt{5}}+2.236$$

$$0.067+E_{\pi}=0.5\times 10^{-3}\times(7.387)=0.004$$

کلی $E<0.004\Rightarrow E=0.0045\approx 0.005$

حاصل عبارت: ممیز شناور

$$\frac{0.618\times10^2+0.184\times10^0}{(0.427\times10^2)\times(0.36810^2)}=\frac{0.620\times10^2}{0.157\times10^4}=0.394910^{-1}$$

$$=0.395\times10^{-1}$$

$\sqrt{19}\pm\sqrt{7}$ سه رقم گرد شود

$\sqrt{7}=2.6457513\approx2.646 \qquad E_{\sqrt{7}}=0.5\times10^{-3}$

$\sqrt{19}=4.3588989\approx4.359 \qquad E_{\sqrt{19}}=0.5\times10^{-3}$

$E_{a+b}\le10^{-3}$

$7.004\le\sqrt{7}+\sqrt{19}\le7.006$

$\sqrt{19}-\sqrt{7}=1.113 \qquad E_{a-b}\le10^{-3}$

$1.712\le\sqrt{19}-\sqrt{7}\le1.714$

حل تمرین از جلسات قبل:

تقریبی از $e^{\frac{2}{3}}$ با خطای 10^{-2} را بیابید:

$\frac{(0.67)^5}{5!}=0.0011251<0.005 \quad :\frac{2}{3}\simeq0.667$

$$e^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}+\frac{(\frac{2}{3})^2}{2!}+\frac{(\frac{2}{3})^3}{3!}+\frac{(\frac{2}{3})^4}{4!}+\frac{(\frac{2}{3})^5}{5!}$$

$$e^{\frac{2}{3}}=1+0.667+0.222+0.049+0.008+0.001\simeq1.947$$

تقریبی از $\sin\frac{\pi}{11}$ با خطای 10^{-4}

$$x=\frac{\pi}{11} \quad ; \quad \bar{x}=0.28560$$

$$\frac{0.28560}{5!}=0.00002 \Rightarrow n=5$$

$$Sinx \simeq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-....$$

$$Sin\frac{\pi}{11} \simeq -\frac{\left(\frac{\pi}{11}\right)^3}{5!}+\frac{\left(\frac{\pi}{11}\right)^5}{5!} \simeq 0.28560-0.00388+0.00002$$

$$\simeq 0.28174$$

تقریبی از $\ln\frac{5}{3}$ با خطای 10^{-2}

$$\frac{0.667}{9}<0.005 \Rightarrow n=9$$

$$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$$

$$x=\frac{2}{3} \Rightarrow \ln\left(\frac{5}{3}\right) \simeq \frac{2}{3}-\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3}-\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{4}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5}{5}$$

$$-\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{6}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^7}{7}-\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^8}{8} \simeq 0.667-0.222+0.0099$$

$$-0.049+0.026-0.015+0.008-0.005=0.599$$

تقریبی از $Arc\tan\frac{\pi}{11}$ با خطای 10^{-2} :

$$\frac{\pi}{11}=0.286$$

$$Arc\tan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots$$

$$\frac{(0.286)^5}{5}=0.004<0.005\Rightarrow n=5$$

$$Arc\tan\frac{\pi}{11}\simeq 0.286-\frac{(0.286)^3}{3}+\frac{(0.286)^5}{5}=$$
$$=0.286-0.008+0.0004=0.277$$

$$Arctas\frac{\pi}{11}=0.278$$

تقریبی از 1 با خطای 10^{-5}:

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\dots$$

$$x=1\Rightarrow\frac{1^4}{3!}=\frac{1}{120}=0.008333<0.000005$$

$$x=1\Rightarrow\frac{Sinx}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}$$

$$x=1\Rightarrow 1-0.166667+0.008333-0.000195+0.00003=$$
$$=0.841177$$

$$\frac{1^8}{9!}=0.000003<0.000005\Rightarrow n=8$$

تعداد و حدود ریشه های معادله زیر را به کمک ترسیم بیاورید:

$$x = 10\cos x \qquad \begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = 10\cos x \end{cases}$$

x	0	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{3\pi}{2}$	$\pm 2\pi$	$\times\frac{5\pi}{2}$	$\pm 3\pi$
y_2	10	0	-10	0	10	0	-10

$\cos x - x = 0 \qquad ; \qquad \varepsilon = 0.001$

$f(x) = Cosx - x$

$a = 0 \Rightarrow f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$

$b = 1 \Rightarrow f(1) = \cos(1) - 1 = -0.0001 < 0$

$f[0,1]$

$f'(x) = -s - n - 1 < 0$ نزولی

a	b	c	f(c)
0	1	0.5	0.378
0.5	1	0.75	0.018
0.5	1	0.625	0.186
0.625	0.75	0.688	0.084
0.688	0.75	0.719	0.033
0.719	0.75	0.734	0.0085
0.734	0.742	0.74	-0.0015
0.738	0.742	0.74	-0.0015
			C=0.739

دستگاه معادلات خطی:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

A= ماتریس ضرایب $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{2} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

B= ماتریس طرف ثابت $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

X= ماتریس مجهولات $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$Ax = B$$

$$|A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} \Rightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}B$$

$$Ix = A^{-1}B \Rightarrow x = A^{-1}B$$

محاسبه A^{-1} د رحالت کلی توصیه نمی شود. زیرا دترمینال A محاسبه اش وقتگیر است بنابراین سعی می کنیم X را به روش های دیگری پیدا کنیم با فرض آنکه $|A| \neq 0$ (تا اینکه دستگاه فقط یک جواب منحصر به فرد پیدا کند).

روش مستقیم: در این روش مستقیماً جواب معادله را محاسبه کنیم. مشهور تنها خطای ناشی از گرد کردن اعداد در ماشین را خواهیم داشت). االبته دستگاه بزرگ باشد ممکن است رشدخطاها ما را جواب واقعی خیلی دور کند.

دستگاه های بالا مثلثی:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ + a_{33}x_n + a_{3n}x_n + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \end{cases}$$

دترمینال ضرایب $A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

حاصلضرب اعضای اول قطر اصلی $= |A|$

$|A| = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}$

فرض کنیم $|A| \neq 0 \Rightarrow a_{11} \ldots \neq 0 \ , \ \forall_i$

از معادله دستگاه بالا مثلثی می توانیم x_n را پیدا کنیم سپس از معادله قبلش x_{n-1} را پیدا می کنیم و به همین ترتیب تا برسیم به معادله اول که x_1 را حساب کنیم (روش جایگذاری پس رو)

طریقه حل روش حذفی گاوس:

ابتدا دستگاه n معادله n مجهولی * را به فرم بالا مثلثی تبدیل می کنیم برای این کار بردار B را به انتهای ماتریس A اضافه کرده ماتریس $[A,B]$ را ماتریس افزوده دستگاه * می گویند.

حال اعمال زیر را که عملیات سطری نام دارند روی ماتریس افزوده انجام می دهیم:

۴- تعویض دو سطر ماریس افزوده (تعویض سطر i ام با $(R_{ij},$

۵- ضرب عددی غیر صفر در اعضای یک سطر ماتریس افزوده:

$$\alpha = 0 \qquad , \qquad R_i(\alpha)$$

۶- افزدن مضربی از یک سطر ماتریس افزوده به سطر دیگر آن (افزودن α` به سطر i ام را با $R_{ij}(\alpha)$ نشان می دهند)

در ذیل با این عملیات یک دستگاه به فرم * را به بالا مثلثی تبدیل می کنیم:

۳- **مقیاس کردن:** اعضای ماتریس A را کاری کنیم که از نظر قدر مطلق کوچکتر یا مساوی با ۱ باشند (کافی است هر سطر را به بزرگترین قدر مطلق جملات آن سطر تقسیم کنیم) این کار فقط یک بار انجام بگیرد قبل از شروع روش گاوس.

۴- در ستون اول بزرگترین عضور از نظر قدر مطلق را پیدا کرده و سطر شامل آن را با سطر اول عوض می کنیم اگر α_{11} بزرگترین عضو از نظر قدر مطلق در اولین ستون باشد آن گاه مضاربی از α_{11} را طوری انتخاب می کنیم که اگر با α_{12} و α_{13} و ...., α_{n1} (یعنی با اعضای زیر آن) جمع کنیم کلیه این اعضا صفر شود. بدین ترتیب اعضای زیر α_{11} را صفر کرده ایم مجدداً فرض می کنیم:

a_{22} بزرگترین عضو از نظر قدر مطلق در ستون دوم باشد سپس مانند قسمت قبل کلیه اعضای زیر a_{22} را نیز صفر می کنیم و به همین ترتیب ادامه می دهیم در نتیجه ماتریس A به یک ماتریس بالامثلثی تبدیل می‌شود.

- مثال دستگاه زیر را به روش حذفی گاوس (همراه با مقیاس کردن و ..) حل می کنیم

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases}$$

:ماتریس افزوده

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{i3}(-1)]{R_{12}(-0.2)} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 1 & 0.4 \\ 1 & -0.5 & -1 & 0.5 \\ 1 & 0.6 & -0.6 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{12}}\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.4 \\ 1 & 0.6 & -0.8 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_{i3}(-1)]{R_{12}(-0.2)}\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0.9 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & -0.9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{23}}\begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 1.1 & 0.2 & -0.9 \\ 0 & 0.9 & 1.2 & 0.3 \end{bmatrix}\xrightarrow{R_{23}}\left(\frac{-9}{1.1}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 1.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1.04 & 1.04 \end{bmatrix}$$

$$1x_1-0.5x_2-1x_3=0.5\rightarrow x_1+0.5-1=0.5\rightarrow x_1=1$$

$$1.1x_2+0.2x_3=0.9\rightarrow 1.1x_2+0.2=-0.9\rightarrow x_2=-1$$

$$1.04x_3=1.04\rightarrow x_3=1$$

روش حذفی گاوس جردن:

پس از مثلثی کردن به روش حذفی گاوس با استفاده از عملیات سطر ماتریس مثلثی را به ماتریس قطری تبدیل می کنیم (بالای قطر اصلی نیز صفر شود)

تمرین- دستگاه زیر را به روش حذفی گاوس و یک بار نیز با روش گاوس جردن حل کنید. (تا یک رقم اعشار)

$$\begin{cases} 0.6x+3.8y+7z=5.7 \\ 2.6x+3.17+5z=2.6 \\ 3.7x+5.8y+2.9z=3.4 \end{cases}$$

روش های تکراری:

در این روش ها به یک جواب تقریبی اولیه شروع می کنیم و آن را یک دستور بازگشتی به کار برده تا جواب تقریبی دیگری به دست آوریم با به کار بردن پی در

پی این دستور دنباله ای از جوابها به دست می آید که تحت شرایط مناسب ما را به جواب واقعی نزدیک می کند. روش های تکراری دارای دو ویژگی سادگی عمل و سهولت اجرا به وسیله کامپیوتر هستند و نسبت به انتشار خطاها حساسیتی ندارند.

این روش معروف از روش های تکراری عبارتند از: روش ژاکوبی و گاوس سایدل.

روش ژاکوبی: دستگاه * را به فرم زیر می نویسیم (از معادله اول x_1 و از معادله دوم x_2 و ... معادله n ام x_n را را حساب می کنیم:

$$x_1=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2-\dots-a_{1n}x_n)$$
$$x_2=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_2x-\dots-a_{2n}x_{2n}x_n)$$
$$x_n=\frac{1}{a_{nn}}(b_n-a_{n1}x-\dots-a_{nn-1}x_n)$$

سپس یک مقدار تقریبی اولیه مانند x^0 برای بردار جواب x انتخاب کرده و در طرف راست معادلات فوق جایگزین می کنیم تا یک مقدار تقریبی دیگری برای جواب به دست اید. مانند $X^{(1)}$؛ مجدداً $X^{(2)}$ به دست آید و به همین ترتیب ادامه می دهیم.

شرط توقف عملیات: اگر $\varepsilon >| x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)} |$ به شرطی که $\forall_i$ در این صورت $X^{(k+1)}$ جواب دستگاه است.

روش گاوش سایدل: این روش همانند روش ژاکوبی می باشد فقط در هر مرحله آخرین تقریبی را که برای هر x_i تا آن مرحله به دست آورده ایم مورد استفاده قرار می دهیم (یعنی آنکه پس از به دست آوردن x_1 از معادله اول با استفاده از جواب

تقریبی اولیه در معادله دوم وقتی می خواهیم x_2 را به دست آوریم x_1 به دست آمده از معادله اول را به اضافه بقیه جوابهای تقریبی اولیه جایگزین می کنیم تا x_2 جدید به دست آید سپس برای محاسبه x_3 از معادله سوم دوباره به جای x_1 و x_2 آن همین x_2 و x_1 اخیر را به اضافه مقادیر تقریبی اولیه قرار می دهیم و به همین ترتیب جلو می رویم)

توجه- فرض کنید برای هر I داشته باشیم: $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}|$

در این صورت ماتریس ضرایب A را قطری مسلط می نامند. در این صورت روش ژاکوپی و روش گاوس سایدل با انتخاب هر مقدار تقریبی اولیه $x^{(0)}$ همگرا می باشد (همگرا: ما را به جواب واقعی نزدیک می کند)

شرط قطری مسلط بودن A یک شرط کافی برای همگرایی است اما این شرط شرط لازم نمی باشد. یعنی ممکن است ماتریس ضرایب A قطری مسلط نباشد، ولی همگرایی اتفاق می افتد.

توجه- هر گاه ضرایب $|a_{ii}|$ نسبت به سایر ضرایب در هر معادله نسبتاً بزرگ باشد انتخاب مقادیر انتخابی اولیه به ازای $\forall_i, x_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$ مناسب است.

توجه- برای بهتر کردن شانس و سرعت همگرایی قبل از استفاده از روش تکراری باید دستگاه را طوری مرتب کرد که تا حد امکان از ضریب قطری یعنی a_{ii} بر

حسب قدر مطلق بیشترین مقدار موجود در همان سطر را (یعنی سطر I ام) داشته باشد شرط توقف عملیات نیز مانند روش ژاکوبی است.

مثال- دستگاه زیر را به روش ژاکوبی حل کنید:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 0x_3 = 12 \\ -4x_1 + 12x_2 - 6x_3 = \\ 0x_1 - 6x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & 14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} |7| \geq |-4| + |0| \\ |12| \geq |-4| + |-6| \\ |14| \geq |0| + |-6| \end{matrix}$$

پس قطری مسلط است. اگر A قطری مسلط نباشد در این صورت با جابجائی معادلات یا افزودن مضربی به معادله دیگر می توان A را قطری مسلط نمود)

فرم کلی: $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{7}(12 + 4x_2) \\ x_2 = \frac{1}{12}(4x_1 + 6x_3) \\ x_3 = \frac{1}{14}(6x_2) \end{cases}$

$X^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ قدار اولیه تقریبی به دلخواه معین می کنیم

$$X^{(1)} : \begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}(12 + 4 \times 0.8333) = 2.1905 \\ x_2 = \frac{1}{12}(4 + 6) = 0.8333 \\ x_3 = \frac{1}{14}(6) = 0.4.4286 \end{cases}$$

$$X^{(1)}:\begin{cases} x_1=\frac{1}{7}(12+4)=2.2857 \\ x_2=\frac{1}{12}(4+6)=0.8333 \\ x_3=\frac{1}{14}(6)=0.4286 \end{cases}$$

$$X^{(1)}:\begin{cases} x_1=\frac{1}{7}(12+4\times0.8333)=2.1905 \\ x_2=\frac{1}{12}(4\times2.2857+6\times0.4286)=0.9762 \\ x_3=\frac{1}{14}(6)=(6\times0.8333)=0.3571 \end{cases}$$

$$X^{(3)}:x_1=\frac{1}{7}(12+4\times0.9762)=1.2721$$

$$x_2=\frac{1}{12}(6\times0.9762)=0.4184)=0.4184$$

- مثال: دستگاه مثال قبل را به روش گاوس سایدن و با همان مقدار تقریبی اولیه حل کنید:

همان مراحل قبل دوباره تکرار می‌شود

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{7}(12+4x_2) \\ x_2=\frac{1}{12(4x_1+6x_3} \\ x_3=\frac{1}{14}(6x_2) \end{cases} \xrightarrow{\text{قریب}} \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$X^{(1)}:\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}(12+4) = 2.2857 \\ x_2 = \frac{1}{12}(4\times 2.25857+6) = 1.2619 \\ x_3 = \frac{1}{14}(6\times 1.2619) = 0.5408 \end{cases}$$

$$X^{(2)}:\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}(12+4\times 1.2619) = 0.5408 \\ x_2 = \frac{-1}{12}(4\times 2.4354+6\times 0.5408) = 0.0822 \\ x_3 = \frac{1}{14}(6\times 1.0822) = 0.4638 \end{cases}$$

$$X^{(1)}:\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}(12+4\times 1.0822) = 2.3327 \\ x_2 = \frac{1}{12}(4\times 2.3327+6\times 0.4638) = 1.0095 \\ x_3 = \frac{1}{14}(6\times 1.0095) = 0.4326 \end{cases}$$

و به همین ترتیب عملیات را ادامه می دهیم. سرعت همگرایی روش دوم بیشتر از روش اول است

$$\begin{cases} x_1 = 2.264 \\ x_2 = 0.960 \\ x_3 = 0.411 \end{cases}$$

- مثال: دستگاه زیر را به هر دو روش حل کنید و مقدار اولیه را $x_i = 1$ را قرار دهید:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_3 - x_4 = 4 \rightarrow |4| \geq |-1| + |-1| \\ 4x_2 - x_3 - x_4 = 4 \rightarrow |4| \geq |-1| + |-1| \\ x_1 + x_2 - ax_3 = 4 \rightarrow |-4| \geq |1| + |1| \\ x_1 + x_2 - 4x_4 = -4 \rightarrow |1| + |1| \end{cases}$$

قطری مسلطی

$$x_1 = 1 + \frac{1}{4}(x_3 + x_4)$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{4}(x_3 + x_4)$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)$$

$$X: \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{4}(1+1) = \frac{3}{2} = -2 - \left(\frac{1}{2}\right) \\ x_2 = 1 + \frac{1}{4}(1+1) = \frac{3}{2} \\ x_3 = 1 + \frac{1}{4}(1+1) = \frac{3}{2} \\ x_4 = 1 + \frac{1}{4}(1+1) = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad X: \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = \frac{7}{4} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ x_2 = 1 + \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = \frac{7}{4} \\ x_3 = 1 + \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = \frac{7}{4} \\ x_4 = 1 + \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$x^{(3)} = \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{4} + \frac{7}{4}\right) = \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ x_2 = \ldots\ldots\ldots \\ x_3 = \ldots\ldots\ldots \\ x_4 = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

جواب واقعی
$$x^{(n)}: x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$: x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \to 2$$

مثال- مطلوبست حل دستگاه زیر به روش ژاکوبی و روش گاوس سایدن:

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_3 = 2 & 1 \geq |3| \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 & 1 \geq |5| + |2| \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -11 & 2 \geq +|6| \end{array}$$

قطری مسلط نیست و باید آنرا به این حالت تبدیل کنیم

با جابجائی معادله داریم:
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -11 \\ x_1 3x_3 = 2 \end{cases}$$

قطری مثلثی است
$$\begin{array}{l} |5| \geq |1| + |2| \\ \Rightarrow |6| \geq |1| + |2| \\ |3| \geq |1| \end{array}$$

حالا با مقدار $X^{(0)} = (0,0,0)$

تمرین- حل مثال بالا با مقدار $(0,0,0)$

مثال- حل دستگاه به هر دو روش:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس به قطری مسلطی تبدیل شود

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ x+2y+z=2 \\ 2x+y-z=4 \quad \Rightarrow \qquad |-1| \geq |2|+|1| \end{cases}$$

منهای یک برابر معادله دوم را به معادله سوم بیفزاییم.

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ x+2y+z=2 \\ x-y-2z=2 \Rightarrow |-2| \geq |1|+|-1| \end{cases}$$

دستگاه های زیر را به روش ژاکوبی و گاوس سایدل حل کنید. (سعی کنید ابتدا ماتریس ضرایب قطری مسلط باشد)

$$\begin{aligned} x-y+10z&=-7 \\ 20x+3y-2z&=5 \qquad\qquad X^{(0)}=(0,0,0) \\ 2x+8y+4z&=25 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 6x-3y+z=1 \\ 2x+y-8z=-15 \qquad\qquad X^{(0)}=(0,0,0) \\ x-6y+z=10 \end{cases}$$

به همراه یک برنامه (روش گاوس)

$$\begin{cases} 2.51x_1+1.48x_2+4.53x_3=0.05 \\ 1.48x_1+0.93x_2-1.3x_3=1.03 \\ 2.68x_1+3.04x_2-1.48x_3=0.53 \end{cases}$$

حل تمرین از جلسه قبل

$$\left.\begin{aligned} &\cos x - x = 0 \\ &f(0) = 1 - 0 = 1 \\ &f(1) = (0.540 - 1) = -0.46 < 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &f:[0.1] \\ &f'(x) = -sonx - 1 < 0 \end{aligned}$$

اکیداً نزولی

a	B	C	$F(C)$
0	1	0.5	0.3776
0.5	1	0.75	-0.0183
0.5	0.75	0.625	0.1860
0.625	0.75	0.6875	0.0853
0.6875	0.75	0.7187	0.0340
0.7187	0.75	0.7344	0.0078
0.7344	0.7422	0.7383	0.0052
0.7383	0.7422	0.7409	-0.0019
0.7383	0.7402	0.7392	-0.0002 < 0.001

C=0.7392

$$x^3 + x - 1 = 0 \qquad a = 0, b = 1, \varepsilon = 10^{-2}$$

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

$$\left.\begin{aligned} &f(0) = -1 < 0 \\ &f(1) = 1 > 0 \end{aligned}\right\} \qquad f:[-1,1] \qquad 3x^2 + 1 > 0$$

پیوسته — اکیداصعودي

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \frac{1-0}{2^n} < 2^n \Rightarrow \log_2^{100} < n$$

$$6.64856 < n \ \rightarrow n = 7$$

$$x - 2^{-x} = 0 \quad , \quad a = 0 \quad , \quad b = 1 \qquad \varepsilon = 10^{-5} = 0.00001$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 0 \rightarrow f(0) = -2^{0} = -1 < 0 \\ b = 1 \rightarrow f(1) = 1 - 2^{-1} = 0.5 > 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} f : [0.1] \quad \text{پیوسته} \\ f'(x) = 1 - 2^{-x} \ln 2 > 0 \end{array}$$

a	B	C	$F(C)$
0	1	0.5	-0.207107
0.5	1	0.75	0.155393
0.5	0.75	0.625	-0.023420
0.625	0.75	0.6875	0.066571
⋮	⋮	⋮	⋮
0.641175	0.691236	0.691206	0.000030
0.641175	0.691206	0.641190	0.0000<0.00001

C=0.64449

روش وتری

$$(1) \quad x + \cos x = 0 \qquad ; \qquad \varepsilon = 10^{-2}$$

$$(3) \quad x^{2} - 2^{x} = 0 \qquad ; \qquad \varepsilon = 10^{-2}$$

$$x + \cos x = 0 \qquad ; \qquad \varepsilon = 10^{-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(b)=0+1=1>0 \\ f(a)=-1-0.5403<0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} f:[-1.0] \text{ پیوسته} \\ f'(x)=1-\sin x>0 \end{array}$$

a	b	c	f(c)
-1	0	-0.68	0.1
-1	-0.68	-0.73	0.02

(روش نقطه ثابت)

$$x+\ln x=0 \qquad x_0=1$$

$$\ln x=-x \Rightarrow x=e^{-x}=g(x)$$

$$|g'(x)|=|-e^{-x}|=e^{-x}$$

در فاصله $[\frac{1}{e},1]$ دقیقاً یک ریشه دارد

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}+\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}=\frac{1}{e}-1<0 \\ f(1)=1+\ln 1=1>0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{1}{e}<x<1 \qquad (\text{اکیداً صعودی}) \quad f'(x)=1+\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}-1<0$$

$$\frac{1}{e}<x<1 \Rightarrow \frac{1}{e}<g(x)<1$$

شرط صحیح است $\qquad \frac{1}{e}<e^{-x}<1$

امتحان می کنیم
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{e}<e^{-\frac{1}{e}}<1 \\ \frac{1}{e}<e^{-1}<1 \end{array}\right.$$

$$x = g(x) = e$$

$$x = g(x) = e^{-x}$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = g(x_0) = e^{-1} = 0.3679$$

$$x_2 = g(x_1) = e^{-0.3679} = 0.3679$$

$$x_3 = g(x_2) = x^{0.6922} = 0.5005$$

.... ادامه می دهیم

$$\left.\begin{array}{l} f:[0,\frac{\pi}{2}]\text{پیوسته} \\ f(0) = \frac{-1}{2} < 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0 \\ f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin x > 0 \end{array}\right\}$$ معادله بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ دقیقاً یک ریشه دارد

$x_n = g(x_{n-1})$ با هر x بین $[0,\frac{\pi}{2}]$ شروع کنیم به جواب می رسیم

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2}\cos x_0 = \frac{1}{2}\cos(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\cos(0.439) = 0$$

تعداد جملات مورد لزوم سری تیلور $f(x) = x^x$ حول $x = 0$ برای های ۰ و ۱ تا

۴ رقم اعشار

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} .... \frac{x^n}{n!} + R,$$

$$\varepsilon = 0.5 \times 10^{-4} \to 0.00005$$

$$R_n < 0.510^{-4} \Rightarrow R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$x = 100\cos x$ چند ریشه مثبت دارد؟ (ترسیم)

$$\begin{cases} y = x \\ y = 100\cos x \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{-1\times 1}{1+0.46} = 0.68$$

$$f(c) = -0.68 + \cos(-0.68) = -.1$$

کوچکترین ریشه مثبت معادله $x^2 \sin = \cos x$ به روش نیوتن رافسون

$$\varepsilon = 10^{-2}$$

$$f(0) = 0^2 \sin(0) - \cos(0) < 0$$

$$f(1)1^2\sin(1)-\cos(1)>0$$

$f:[0,1]$ پیوسته

اکیداً صعودی $f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x+\sin x>0$ دقیقاً یک ریشه بین صفر و یک موجود است.

شرایط نیوتن رافسون برقرار است $f(x)=f''(x)>0$

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

برای شروع $\rightarrow f(x).f''(x)>0$

$$f''(x)=2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin(x)+\cos x$$

نقطه صفر مناسب $f(0)=-1\ ,\ f''(0)=1\Rightarrow f(0).f''(0)<0$

نیست

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{36}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}8\simeq\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-0.738<0$$

این نقطه مناسب نیست $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{\pi}{3}.\sqrt{3}-\left(\frac{\pi^2}{36}\right).\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}>0$

$x_0=1$: نقطه اول چون شرایط نقطه مناسب را داراست

$$x_n=x_{n-1}\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\frac{f(1)}{f'(1)}=....$$

به همین ترتیب ادامه می دهیم.

ریشه معادله $x-\frac{1}{2}\cos x$ با روش تکرار ساده $[0,\frac{\pi}{2}]$

$$x-\frac{1}{2}\cos x=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}\cos x=g(x)$$

شرط برقرار $0<x<\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 0<\frac{1}{2}\cos(x)<\frac{\pi}{2}$$

است