توزیع دما در میله متناهی

میله ای با طول ۵ سانتیمتر در نظر می گیریم. ضریب K را برای این میله ۰/۲۸ درنظر می گیریم. دمای میله در زمان ۰ در نقطه ابتدا ۲۰۰ درجه سانتیگراد و در نقطه انتها ۵۰ درجه سانتیگراد می باشد. می خواهیم دمای نقاط مختلف میله را پس از گذشت زمان $\Delta t = 0.1S$ بدست آوریم.

L=۲۰ cm **K=۰.۲۸** $\rho =$ **۲.۵** **C_p=۰.۱۹۳۴**

$\Delta X=\frac{5}{5}=1$ **t=۰→T=۰**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

هدف ما بدست آوردن دمای نقاط ٤ و ٣ و ٢ و ١ پس از گذشت زمان $\Delta t = 0.1S$ می باشد. برای این منظور ابتدا پارامتری به نام λ را محاسبه می کنیم.

$$\lambda=\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}=\frac{0.579\times 0.1}{1^2}=0.0579$$

مفروضات مشترک برای هر سه روش:

۱–در تمام فرمولها L=۰

۲-i را هم ابتدا مساوی ۱ قرار داده و همینطور به ترتیب مساوی ۲ و ۳ و ٤ قرار می دهیم. (چون میله را به ٥ قسمت تقسیم کرده ایم) که در تمام روشها به نحوی منجر به شکل گیری دستگاه ٤ معادله ٤ مجهول می شود.

۳-دمای نقطه ابتدایی میله در زمان صفر برابر ۲۰۰ درجه سانتیگراد و نقطه انتهایی برابر ٥٠ درجه سانتیگراد می باشد. با توجه به قراردادها می نویسیم

$$T_1^{\circ} = T_2^{\circ} = T_3^{\circ} = T_4^{\circ} = \circ$$
$$T_{\circ}^{\circ} = T_{\circ}^{1} = 200$$
$$T_5^{\circ} = T_5^{1} = 50$$

T_a^b اندیس b نشان دهنده زمان (بازه زمانی و نه ثانیه) و اندیس a نشان دهنده مکان (بازه مکانی و نه سانتیمتر) می باشد.

که البته در این مسئله استثناً چون $\Delta x = 1$ می باشد بازه مکانی و Δx با هم برابرند. برای حل این مسئله می توان از سه روش Explicit Method و Implicite Method و Crank-nicalson Method استفاده کرد.

روش اول: Explicit Method

$$\alpha\left(\frac{T_{i+1}^{L}-2T_{i}^{L}+T_{i-1}^{L}}{\Delta x^{2}}\right)=\frac{T_{i}^{L+1}-T_{i}^{L}}{\Delta t}$$

با فرض $\lambda=\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^{2}}$ معادله فوق پس از ساده شدن به فرم زیر درمی آید.

$$T_{i}^{L+1}=T_{i}^{L}+\lambda(T_{i+1}^{L}-2T_{i}^{L}+T_{i-1}^{L})$$

i=۱ ، L=۰ را در معادله بالا قرار می دهیم و همینطور به ترتیب i=۲ ، L=۰ و i=۳ ، L=۰ و i=٤ ، L=۰ را در فرمول بالا جایگذاری می کنیم.

$$T_{1}^{1}=0+0.0579(0-2(0)+200)=11.58$$
$$T_{2}^{1}=0+0.0579(0-2(0)+0)=0$$
$$T_{3}^{1}=0+0.0579(0-2(0)+0)=0$$
$$T_{4}^{1}=0+0.0579(50-2(0)+0)=2.89$$

پس دمای نقاط ٤ و ۳ و ۲ و ۱ را پس از گذشت $\Delta t=0.1S$ به دست آوردیم.

$\lambda\le\frac{1}{2}$ باشد تا پایدار باشد.

$\lambda\le\frac{1}{4}$ برای جلوگیری از نوسان.

$\lambda\le\frac{1}{6}$ برای دقت بالا

روش دوم Implicit Method

این روش کاملاً پایدار است و هیچ شرطی هم ندارد

$$\alpha\left(\frac{T_{i+1}^{L+1}-2T_{i}^{L+1}+T_{i-1}^{L+1}}{\Delta x^{2}}\right)=\frac{T_{i}^{L+1}-T_{i}^{L}}{\Delta t}$$

پس از ساده سازی داریم:

$$-\lambda T_{i+1}^{L+1}+(1+2\lambda)T_{i}^{L+1}-\lambda T_{i-1}^{L+1}=T_{i}^{L}$$

دقیقاً مانند روش قبل ابتدا i=۱ ، L=۰ را در معادله بالا قرار می دهیم و همینطور به ترتیب i=۲ ، L=۰ و i=۳ ، L=۰ و i=٤ ، L=۰ را در فرمول بالا جایگذاری می کنیم که منجر به شکل گیری دستگاه چهار معادله، چهار مجهول زیر می شود.

$$\begin{bmatrix} 1.1158 & -0.0579 & 0 & 0 \\ -0.0579 & 1.1158 & -0.0579 & 0 \\ 0 & -0.0579 & 1.1158 & -0.0579 \\ 0 & 0 & -0.0579 & 1.1158 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11.58 \\ 0 \\ 0 \\ 2.8950 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات بالا را از طریق روش تجزیه LU حل می کنیم.

```
>> A=[۱.۱۱۵۸ -.۰۵۷۹ ۰ ۰;-.۰۵۷۹ ۱.۱۱۵۸ -.۰۵۷۹ ۰; ۰ -.۰۵۷۹ ۱.۱۱۵۸ -.۰۵۷۹;۰ ۰ -.۰۵۷۹ ۱.۱۱۵۸];
>> B=[۱۱.۵۸;۰;۰;۲.۸۹۵۰];
>> [L,U]=lu(A)

L =

    ۱.۰۰۰۰         ۰         ۰         ۰
```

```
  -۰.۰۵۱۹   ۱.۰۰۰۰        ۰        ۰
        ۰  -۰.۰۵۲۰   ۱.۰۰۰۰        ۰
        ۰        ۰  -۰.۰۵۲۰   ۱.۰۰۰۰


U =

   ۱.۱۱۵۸  -۰.۰۵۷۹        ۰        ۰
        ۰   ۱.۱۱۲۸  -۰.۰۵۷۹        ۰
        ۰        ۰   ۱.۱۱۲۸  -۰.۰۵۷۹
        ۰        ۰        ۰   ۱.۱۱۲۸

>> Z=inv(L)*B

Z =

  ۱۱.۵۸۰۰
   ۰.۶۰۰۹
   ۰.۰۳۱۳
   ۲.۸۹۶۶

>> T=inv(U)*Z

T =

  ۱۰.٤۰٦۷
   ۰.٥٤۸٥
   ۰.۱٦۳٥
   ۲.٦۰۳۰
```

پس دمای نقاط ٤ و ٣ و ٢ و ١ را پس از گذشت زمان $\Delta t = 0.1S$ بدست آوردیم.

روش سوم Crank-Nicalson Method

این روش دقت خیلی خوبی دارد.

$$-\lambda T_{i-1}^{L+1}+2(1+\lambda)T_i^{L+1}-\lambda T_{i+1}^{L+1}=\lambda T_{i-1}^{L}+2(1-\lambda)T_i^{L}$$

باز هم مانند دو روش قبلی، ابتدا i=۱، L=۰ سپس به ترتیب i=۲ ، L=۰ و i=۳ ، L=۰ و i=٤ ، L=۰ را در فرمول بالا جایگذاری می کنیم که منجر به شکل گیری دستگاه چهار معادله، چهار مجهول زیر می شود.

$$\begin{bmatrix} 2.1158 & -0.0579 & 0 & 0 \\ -0.0579 & 2.1158 & -0.0579 & 0 \\ 0 & -0.0579 & 2.1158 & -0.0579 \\ 0 & 0 & -0.0579 & 2.1158 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 23.16 \\ 0 \\ 0 \\ 2.8950 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات بالا را از طریق روش تجزیه LU حل می کنیم.

```
>> A=[۲.۱۱۵۸ -.۰۵۷۹ ۰ ۰; -.۰۵۷۹ ۲.۱۱۵۸ -.۰۵۷۹ ۰; ۰ -.۰۵۷۹ ۲.۱۱۵۸ -.۰۵۷۹; ۰ ۰ -.۰۵۷۹ ۲.۱۱۵۸];
>> B=[۲۳.۱٦;۰;۰;۲.۸۹۵۰];
>> [L,U]=lu(A)

L =

   ۱.۰۰۰۰        ۰        ۰        ۰
  -۰.۰۲۷٤   ۱.۰۰۰۰        ۰        ۰
        ۰  -۰.۰۲۷٤   ۱.۰۰۰۰        ۰
        ۰        ۰  -۰.۰۲۷٤   ۱.۰۰۰۰


U =
```

```
    ۲.۱۱۵۸   -۰.۰۵۷۹        ۰         ۰
         ۰    ۲.۱۱۴۲   -۰.۰۵۷۹        ۰
         ۰         ۰    ۲.۱۱۴۲   -۰.۰۵۷۹
         ۰         ۰         ۰    ۲.۱۱۴۲

>> Z=inv(L)*B

Z =

   ۲۳.۱۶۰۰
    ۰.۶۳۳۸
    ۰.۰۱۷۴
    ۲.۸۹۵۵

>> T=inv(U)*Z

T =

   ۱۰.۹۵۴۵
    ۰.۳۰۱۰
    ۰.۰۴۵۷
    ۱.۳۶۹۵
```

مجدداً و این بار از روش **Crank-Nicalson Method** دمای نقاط ٤ و ٣ و ٢ و ١ را به دست آوردیم.