248F

248

F

نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

صبح جمعه
۹۳/۱۲/۱۵
دفترچه شماره ۱ از ۲

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمــون ورودی
دوره‌های دکتــری (نیمه متمرکز) داخل ــ ســال ۱۳۹۴

مهندسی برق ــ هوش و رباتیک (کد ۲۳۰۶)

تعداد سؤال: ۴۵ — مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (سیستم‌های کنترل خطی ، کنترل مدرن ،الگوریتم‌های پیشرفته)	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

اسفند ماه ــ سال ۱۳۹۳

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱- **تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت زیر است.**

$$G(s)H(s)=\frac{k(s+1)^2}{s^2(s^2+1)(s-1)}$$

به ازای $k=-3$، معادلهٔ مشخصه سیستم:

۱) یک جفت ریشه روی محور موهومی و سه ریشه در سمت راست آن دارد.

۲) یک ریشه در سمت راست محور موهومی و چهار ریشه در سمت چپ آن دارد.

۳) سه ریشه در سمت راست محور موهومی و دو ریشه در سمت چپ آن دارد.

۴) یک جفت ریشه روی محور موهومی و یک ریشه در سمت راست و دو ریشه در سمت چپ آن دارد.

۲- **سیستم حلقه بسته‌ای با فیدبک منفی واحد و تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)=\frac{ks^2}{(s+1)^4}$ ، یک جفت قطب حلقه بسته روی محور موهومی دارد. قطب‌های حلقه بستهٔ دیگر آن کجا قرار دارند؟**

۱) روی محور حقیقی منفی

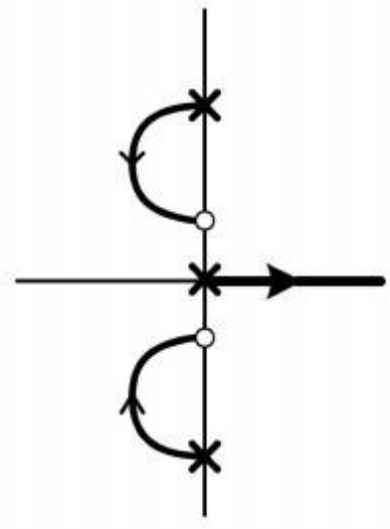
۲) روی محور حقیقی در دو سمت مبدأ

۳) به شکل مختلط در سمت راست محور موهومی

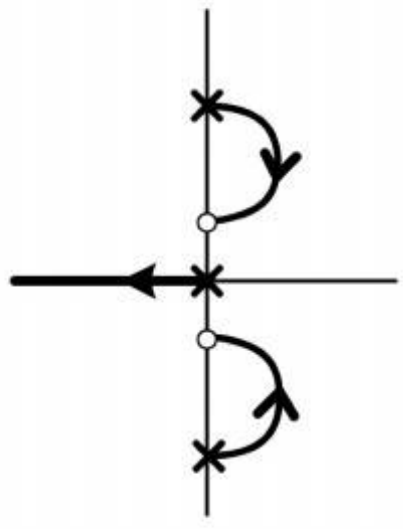
۴) به شکل مختلط در سمت چپ محور موهومی

۳- **رابطهٔ $G(s)H(s)=\frac{k(s^2+0/1)}{s(s^2+1)}$ مفروض است. کدام دیاگرام، مکان‌هندسی ریشه‌ها را به درستی برای $k>0$ نشان می‌دهد؟**

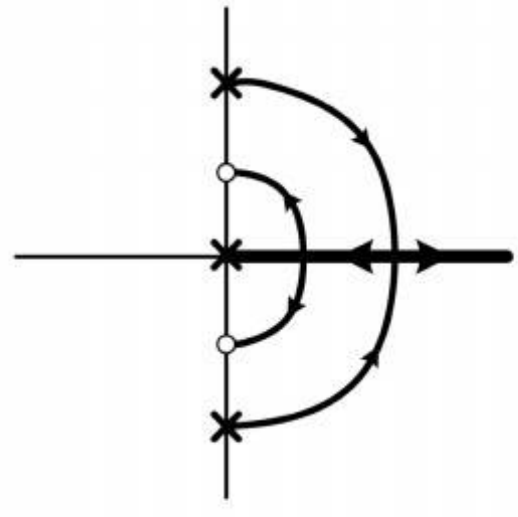
۱)



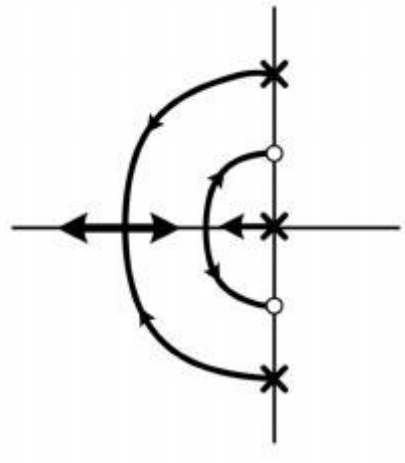
۲)



۳)

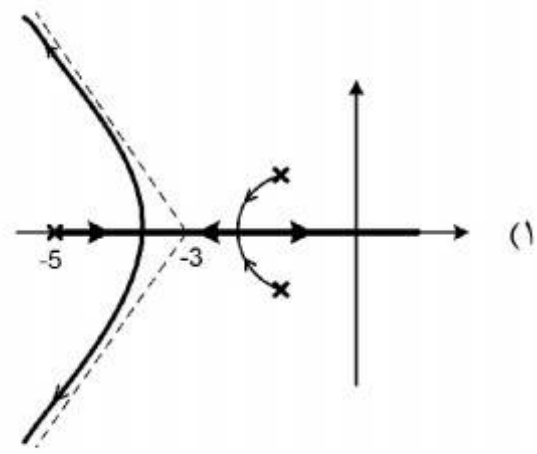


۴)

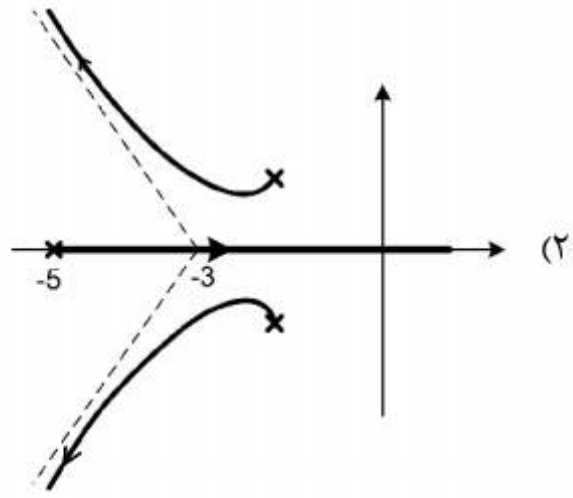


۴- کدام دیاگرام نشان دهندهٔ مکان هندسی قطب‌های سیستم حلقه بسته‌ای با فیدبک منفی و تابع تبدیل حلقه باز $G(s)=\frac{k}{(-s-5)(s^2+4s+5)}$ برای $k>0$، است؟

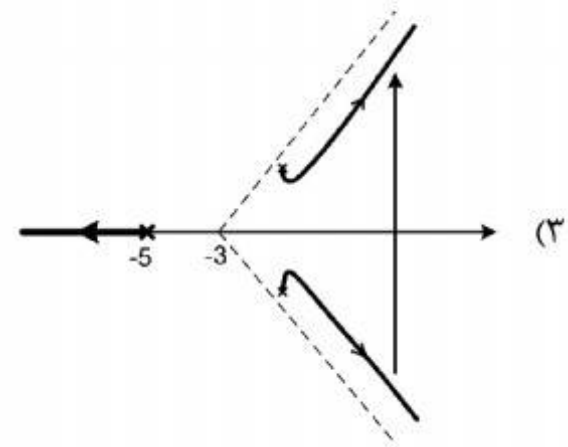
۱)



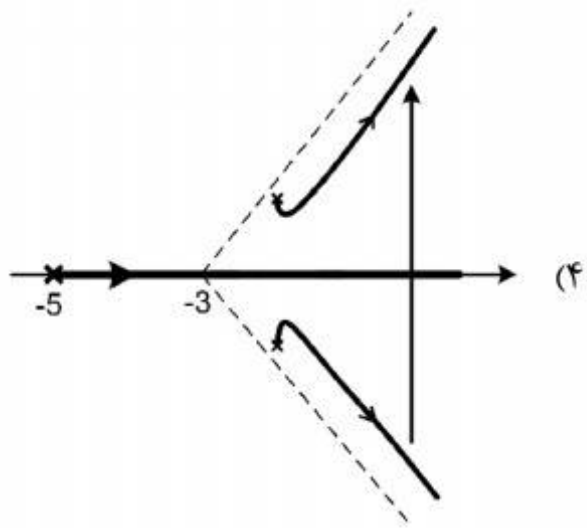
۲)



۳)



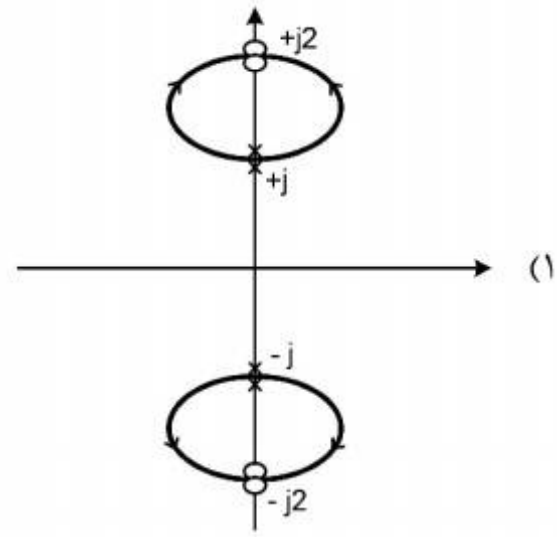
۴)



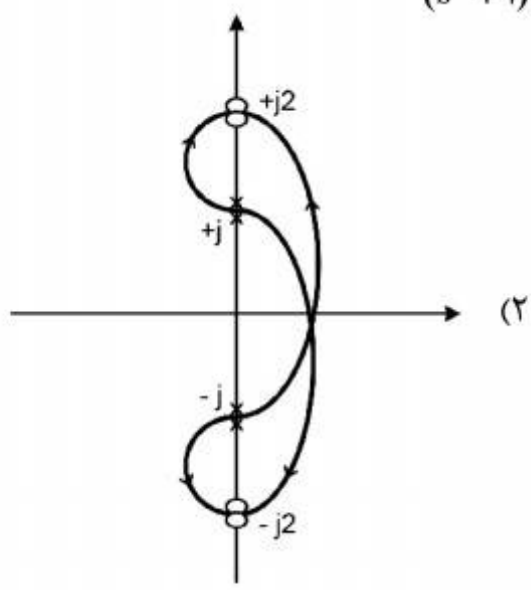
۵- در سیستم حلقه بستهٔ زیر با فیدبک واحد مثبت، مکان هندسی قطب‌های سیستم (حلقه بسته) به ازای تغییرات $k \geq 0$، کدام است؟

$$G(s) = \frac{k(s^2+4)^2}{(s^2+1)^2}$$

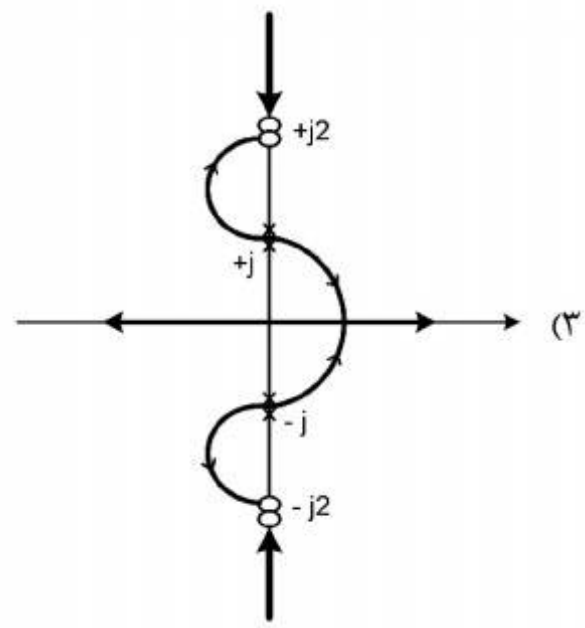
۱)



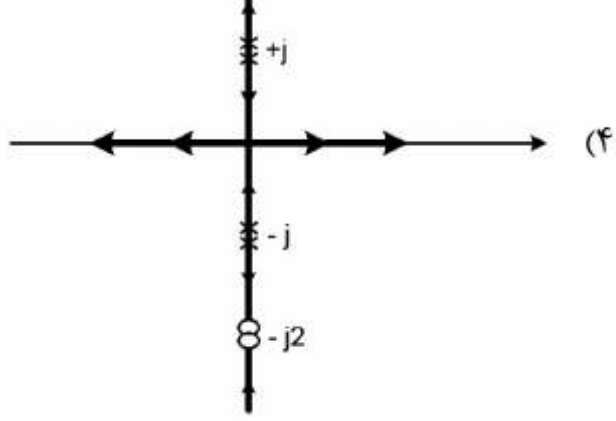
۲)



۳)

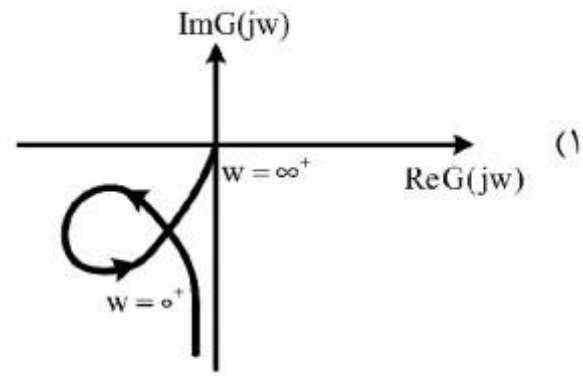


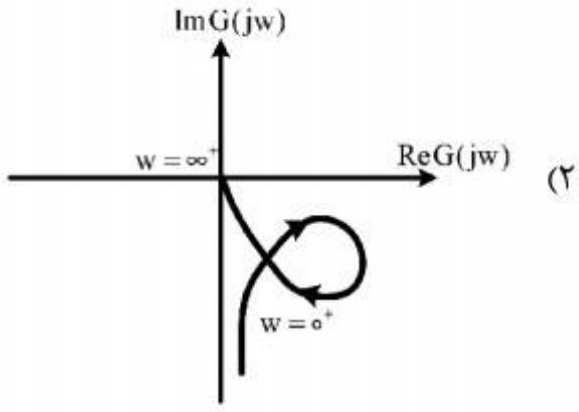
۴)

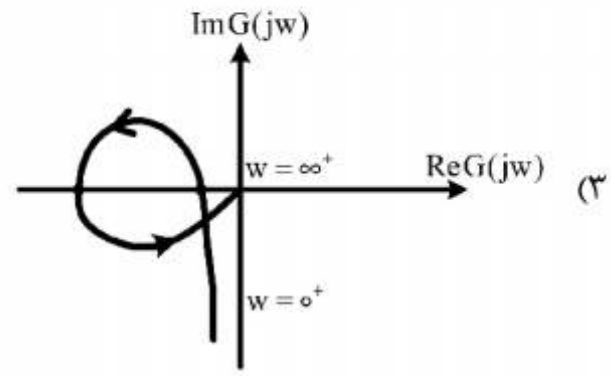


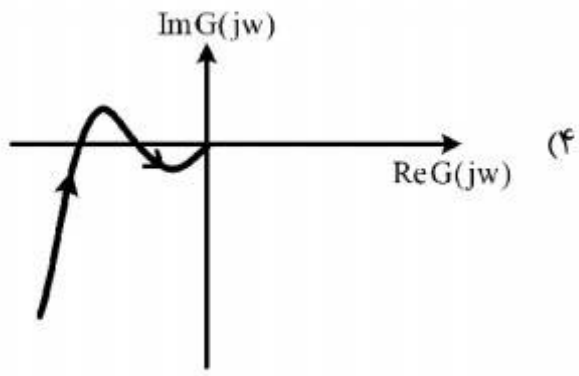
۶- دیاگرام قطبی تابع تبدیل سیستم زیر، کدام است؟

$$G(s)=\frac{s^{۲}-۲s+۴}{s^{۳}-۱۰s^{۲}+۵۰s}$$

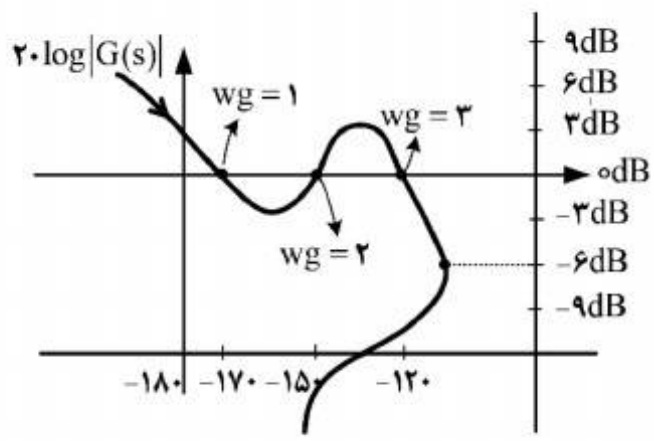
۱)


۲)


۳)


۴)


۷- منحنی اندازه برحسب فاز یک سیستم در شکل زیر قرار دارد، به ازای چه بهره‌ای (k) حد فاز سیستم حداکثر می‌شود و اگر سیستم تأخیردار شود ماکزیمم تأخیر موجود برای پایداری سیستم، کدام است؟ (تأخیر از جنس e^{-Ts} می‌باشد.)



G(jw)

۱) $T_{max}=\frac{\pi}{۱۸}\ ,\ k=\frac{۱}{۲}$

۲) $T_{max}=\frac{\pi}{۹}\ ,\ k=\frac{۱}{۲}$

۳) $T_{max}=\frac{\pi}{۱۸}\ ,\ k=۲$

۴) $T_{max}=\frac{\pi}{۹}\ ,\ k=۲$

۸- **حد بهرهٔ (GM) سیستم با تابع تبدیل حلقه باز زیر، کدام است؟**

$$G(s)H(s)=\frac{۱}{(s+۱)^۳}$$

۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۲

۹- **برای سیستم** $\begin{cases}\dot{x}=\begin{pmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & ۳\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}۱\\ ۰\end{pmatrix}u(t)\\ y(t)=(۲ \quad ۳)x(t)\end{cases}$**، فیدبک حالت** $k=(k_۱ \quad k_۲)$ **را اعمال می‌کنیم. با فرض** $u(t)=r(t)-kx(t)$**، کدام مورد درست است؟**

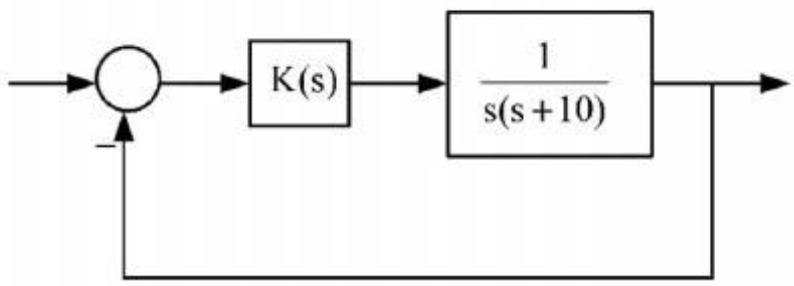
۱) برای $k_۱ \neq ۴$، سیستم حلقه بسته کنترل‌پذیر می‌گردد.

۲) $k_۲$ تأثیری برمحل مقادیر ویژه سیستم با فیدبک حالت ندارد.

۳) به ازای تمام مقادیر $k_۱$ سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت ناپایدار است.

۴) با تعیین مقدار مناسب $k_۱$ می‌توان در پاسخ پله سیستم با فیدبک حالت، بالازدگی مناسب ($\zeta<۱$) را به‌دست آورد.

۱۰- **در سیستم حلقه بستهٔ زیر، کدام کنترل کننده می‌تواند در پاسخ به ورودی پله واحد، سریع‌ترین پاسخ خروجی (بدون بالازدگی) را نتیجه دهد؟**



۱) $K(s)=\frac{۹s}{s+۱۰}$

۲) $K(s)=\frac{۳(s+۱۰)}{s+۶}$

۳) $K(s)=\frac{۹(s+۱۰)}{(s+۶)}$

۴) $K(s)=\frac{۱۲(s+۱۰)}{(s+۶)}$

۱۱- **کدام کنترل کنندهٔ** $G_c(s)$ **می‌تواند شرایط خواسته شده در سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز** $G(s)=\frac{۱}{s^۲+۱}$ **را برآورده سازد؟**

الف: خطای حالت دائم برای ورودی شیب کمتر از ده درصد گردد.

ب: پاسخ پله سریعترین پاسخ بدون بالازدگی باشد.

۱) $G_c(s)=\frac{۴۰(s+۰/۱)}{s+۱۰}$

۲) $G_c(s)=\frac{۴۰(s+۰/۱)(s+۱۰)}{s}$

۳) $G_c(s)=\frac{۴۰۰(s+۰/۱)}{s}$

۴) $G_c(s)=\frac{۴۰۰(s+۰/۱)(s+۱۰)}{s}$

۱۲- معادلات دینامیکی حالت در یک سیستم با فیدبک واحد به صورت زیر است که در آن $r(t)$ ورودی و یک تابع شیب واحد و y خروجی است.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -\omega_n^۲ & -۲\xi\omega_n \end{bmatrix}\underline{x} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} r(t) \quad , \quad y = \begin{bmatrix} \omega_n^۲ & ۰ \end{bmatrix}\underline{x}$$

چنانچه ω_n به میزان ۵٪ افزایش یابد، به ازای $\xi > ۰$، خطای ماندگار چگونه تغییر می‌کند؟

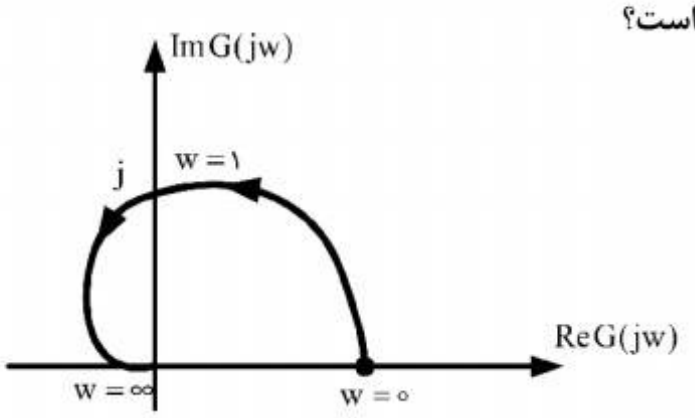
۱) ۵٪ کاهش می‌یابد.

۲) ۵٪ افزایش می‌یابد.

۳) ۱۰٪ کاهش می‌یابد.

۴) ۱۰٪ افزایش می‌یابد.

۱۳- شکل زیر، دیاگرام یک سیستم قطبی حلقه‌باز مرتبه ۲ تمام قطب با فیدبک واحد را نشان می‌دهد. خطای ماندگار سیستم حلقه بسته به ورودی پله واحد، کدام است؟



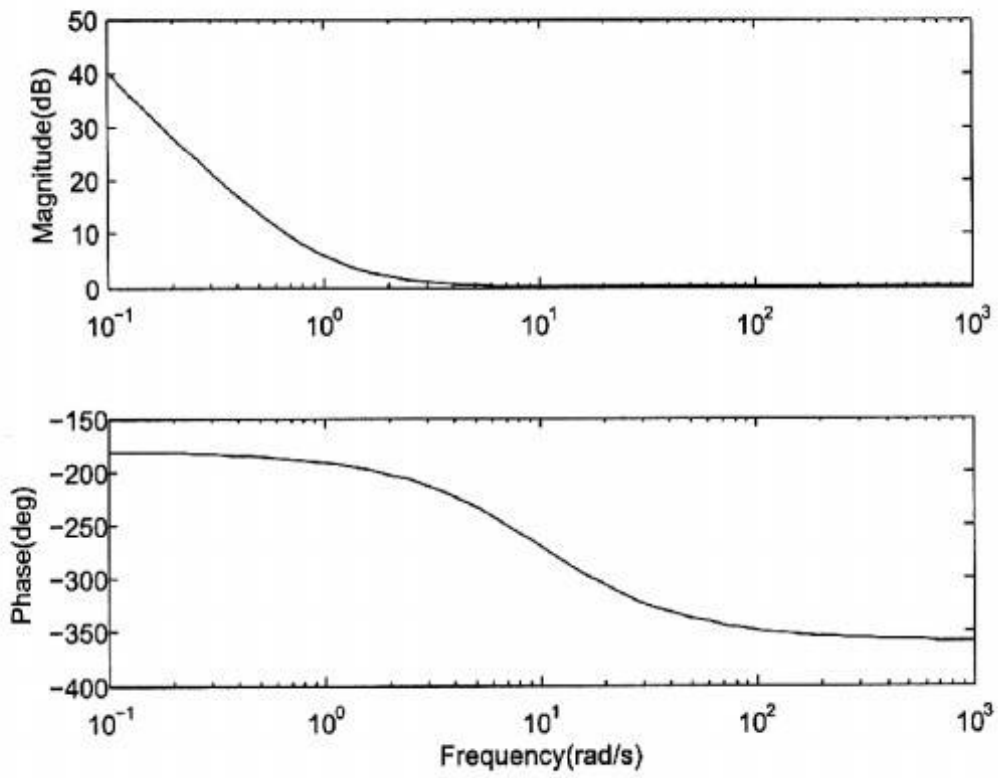
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) ۱

۳) ۲

۴) ∞

۱۴- دیاگرام بودی زیر، مربوط به کدام تابع تبدیل است؟



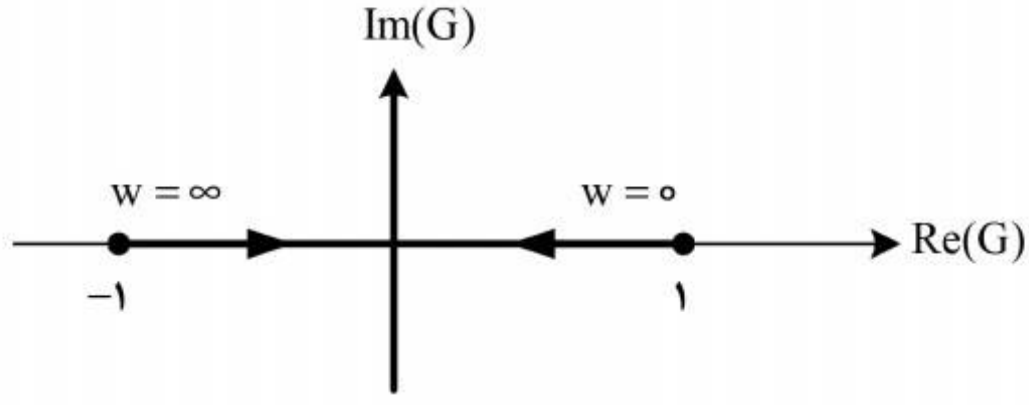
۱) $G(s) = \frac{(۱-s^۲)(۱-۰/۱s)}{s^۲(۱+۰/۱s)}$

۲) $G(s) = \frac{۱-s^۲}{s^۲}$

۳) $G(s) = \frac{(۱-۰/۱s)}{s^۲(۱+۰/۱s)}$

۴) $G(s) = \frac{(۱-۰/۱s)(۱+۰/۲s)(۱+۰/۳s)}{s^۲(۱+۰/۱s)}$

۱۵- کدام گزینه در مورد پایداری سیستم فیدبک واحدی با سیستم حلقه باز درجه دوی $G(s)$، درست است؟ دیاگرام قطبی$G(s)$ ، در شکل زیر نشان‌داده شده است.



۱) پایدار مرزی به ازای $|k|<1$

۲) پایدار مرزی به ازای $|k|>1$

۳) ناپایدار به ازاءی $0<k<\infty$ با دو قطب سمت راست

۴) ناپایدار به ازاءی $-\infty<k<0$ با دو قطب سمت راست

۱۶- سیستم تک ورودی ـ تک خروجی با معادلات حالت $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=cx\end{cases}$ و شرایط اولیهٔ $x(0)=x_0$ را در نظر بگیرید. به ازای چه مقداری از x_0، حالت سیستم در پاسخ به ورودی ضربه در تمام زمان‌ها صفر است؟

۱) $x_0=-AB$

۲) $x_0=-A^{-1}B$

۳) $x_0=-A^{2}B$

۴) $x_0=-B$

۱۷- پاسخ ورودی صفر یک سیستم LTI به شرایط اولیهٔ $x_0=\begin{bmatrix}0\\ a\\ a\end{bmatrix}$، به صورت زیر داه شده است:

$$y(t)=3ae^{-t}-ae^{-2t}$$

گزینهٔ درست کدام است؟

۱) بعد زیر فضای رویت‌پذیر سیستم، حداقل برابر با یک است.

۲) بعد زیر فضای رویت‌ناپذیر سیستم، حداکثر برابر سه است.

۳) بعد زیرفضای رویت‌ناپذیر سیستم، یک است.

۴) بعد زیرفضای رویت‌پذیر سیستم ، یک است.

۱۸- در مورد سیستم $\underline{y}=\begin{pmatrix}۱&۱&۱&۱\\۱&۱&۰&۰\end{pmatrix}\underline{x}$ ، $\dot{\underline{x}}=\begin{pmatrix}-۱&۱&۰&۰\\۰&-۱&۰&۰\\۰&۰&۰&۰\\۰&۰&۰&۰\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}۰&۰\\۱&۰\\۱&۰\\۰&۱\end{pmatrix}\underline{u}$ ، گزینهٔ درست کدام است؟

۱) پایدار BIBO هست، اما پایدار مجانبی و پایدار لیاپانوفی نیست.

۲) پایدار مجانبی و پایدار لیاپانوفی است، اما پایدار BIBO نیست.

۳) پایدار لیاپانوفی است، اما پایدار مجانبی و BIBO نیست.

۴) پایدار مجانبی، پایدار لیاپانوفی و پایدار BIBO نیست.

۱۹- ماتریس A متقارن دارای فرم جردن به شکل $\begin{bmatrix}-۱&۰&۰\\۰&-۱&۰\\۰&۰&۲\end{bmatrix}$ می‌باشد. اگر $f(x)=x^{۳}$ باشد، بزرگترین مقدار تکین $f(A)$ ، کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۴

۴) ۸

۲۰- در مورد پایداری مرزی سیستم‌های زیر، گزینهٔ درست کدام است؟

الف) $\dot{x}=\begin{bmatrix}۰&۱&۰&۰&۰&۰\\-۱&۰&۰&۰&۰&۰\\۰&۰&۰&۱&۰&۰\\۰&۰&-۱&۰&۰&۰\\۰&۰&۰&۰&۰&۱\\۰&۰&۰&۰&-۱&۰\end{bmatrix}x$

ب) $\dot{x}=\begin{bmatrix}۰&۱&۱&۰&۰&۰\\-۱&۰&۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۰&۱&۱&۰\\۰&۰&-۱&۰&۰&۱\\۰&۰&۰&۰&۰&۱\\۰&۰&۰&۰&-۱&۰\end{bmatrix}x$

۱) سیستم الف پایدار مرزی است و سیستم ب پایدار مرزی نیست.

۲) سیستم الف پایدار مرزی نیست و سیستم ب پایدار مرزی است.

۳) هر دو سیستم پایدار مرزی می‌باشند.

۴) هیچ‌کدام پایدار مرزی نیستند.

۲۱- برای سیستم زیر چنانچه بردار شرایط اولیه به صورت $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ باشد، به ازای کدام رابطه، سیستم با ورودی پله واحد $u(t)$ ، حالت‌های محدود خواهد داشت؟ $\dot{x} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} u$

۱) $-a = ۲ + b$

۲) $a + b + ۱ = ۰$

۳) $a = -b$

۴) حالت‌های سیستم به شرایط اولیه بستگی ندارند.

۲۲- در سیستم زیر مقدار $\frac{d}{dt_۰}\varphi(t, t_۰)$ به ازای $t_۰ = ۱$، کدام است؟ φ ماتریس انتقال حالت از لحظهٔ $t_۰$ به t است.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ e^{t} & ۱ \end{bmatrix} x$$

۱) $\begin{bmatrix} e^{۱-t} & ۰ \\ ۰ & e^{۱-t} \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} e^{t-۱} & ۰ \\ e^{۱} & e^{t-۱} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} e^{-t+۱} & ۰ \\ -e^{۱} & -e^{t-۱} \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} e^{t-۱} & ۰ \\ -e^{۱} & e^{۱-t} \end{bmatrix}$

۲۳- نمایش فضای حالت سیستم زیر کدام است؟

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by + cy^{۲} = u + \dot{u}$$

۱) $\dot{x}_۱ = ax_۲ + x_۱ + u \ , \ \dot{x}_۲ = bx_۲ + cx_۲^{۲} + u \ , \ y = x_۱$

۲) $\dot{x}_۱ = -ax_۱ + x_۲ + u \ , \ \dot{x}_۲ = -bx_۱ - cx_۱^{۲} + u \ , \ y = x_۱$

۳) $\dot{x}_۱ = ax_۱ + x_۲ + u \ , \ \dot{x}_۲ = bx_۱ + cx_۱^{۲} + u \ , \ y = x_۱$

۴) $\dot{x}_۱ = ax_۲ + x_۱ + u \ , \ \dot{x}_۲ = bx_۲ + cx_۱^{۲} + u \ , \ y = x_۱$

۲۴- تحقق کاهش‌ناپذیر سیستم زیر کدام است؟

$$H(s)=\frac{s^{۲}+(s+\alpha)s+۵\alpha}{(s+۲)(s+۳)(s+\alpha)}$$

۱) $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۶ & -۵\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix}۱ & ۵\end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۶ & -۵\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix}۵ & ۱\end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۶ & -۵\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix}۵ & ۱\end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۶ & -۵\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix}۱ & ۵\end{bmatrix}$

۲۵- کدام گزینه در مورد سیستم زیر، درست است؟

$$\dot{\underline{x}}=\begin{pmatrix}-۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}۰ & ۱\\ ۰ & ۰\\ ۰ & ۰\\ ۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{pmatrix}\underline{u}\quad,\quad \underline{y}=\begin{pmatrix}۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱\end{pmatrix}\underline{x}$$

۱) با فیدبک حالت $\underline{u}=-k\underline{x}+\underline{r}$ می‌توان تمامی قطب‌های سیستم را در -۱ جایابی نمود.

۲) با فیدبک حالت $\underline{u}=-k\underline{x}+\underline{r}$ می‌توان تمامی قطب‌های سیستم را در -۲ جایابی نمود.

۳) کمترین مرتبهٔ تخمین زن حالت برای این سیستم ۲ است.

۴) کمترین مرتبهٔ تخمین زن حالت برای این سیستم ۵ است.

۲۶- برای سیستم: $\dot{\underline{x}}=\begin{pmatrix}۲ & ۱ & -۲ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}۱\\ ۰\\ ۰\\ ۰\end{pmatrix}u\quad,\quad \underline{y}=\begin{pmatrix}۱ & ۰ & ۰ & ۰\end{pmatrix}\underline{x}$ بهرهٔ $\underline{k}$ در قانون کنترل $u=\underline{kx}+r$، به منظور جایابی قطب‌ها در $\{-۲\pm ۲i\ ,\ -۶\ ,\ -۴\}$، چقدر است؟

۱) $k=(۱۶\quad ۷۳\quad ۱۷۴\quad -۱۹۲)$

۲) $k=(-۱۶\quad -۷۳\quad -۱۷۴\quad ۱۹۲)$

۳) $k=(۱۴\quad ۷۱\quad ۱۷۸\quad ۱۹۲)$

۴) $k=(-۱۴\quad -۷۱\quad -۱۷۸\quad -۱۹۲)$

۲۷- در سیستم زیر به ازای چه مقدار α نمی‌توان یک رویتگر حالت برای این سیستم طراحی کرد؟

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} ۰ & -۲ & ۱ \\ ۰ & \alpha & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} u \quad , \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \underline{x}$$

۱) $\alpha = ۰$

۲) $\alpha = ۱$

۳) کلیهٔ مقادیر α

۴) هیچ مقدار α

۲۸- سیستم خطی $s_۱ \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ را در نظر بگیرید: فیدبک حالت $u(t) = kx(t) + r(t)$ را که در آن $r(t)$ ورودی مرجع است به سیستم اعمال می‌کنیم. می‌دانیم که $s_۱$، رویت‌پذیر و کنترل‌ناپذیر با ۲ مود کنترل‌ناپذیر است. در مود سیستم $s_۱$ با فیدبک مورد نظر، کدام گزینه برقرار است. ($s_۲$ را سیسم حلقه بسته در نظر بگیرید.)

۱) $s_۲$ احتمالاً رویت‌پذیر است اما با تعداد مودهای نامعلوم، کنترل‌ناپذیر است.

۲) $s_۲$ همواره رویت‌پذیر است اما ممکن است کنترل‌پذیر باشد.

۳) $s_۲$ ممکن است رویت‌پذیر باشد اما کنترل‌ناپذیر با ۲ مود کنترل‌ناپذیری است.

۴) $s_۲$ قطعاً رویت‌پذیر و کنترل‌پذیر است.

۲۹- سیستم زیر را در نظربگیرید:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & -۳ \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} ۰ \\ ۲ \end{pmatrix} u \quad , \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \end{pmatrix} \underline{x}$$

کنترل کنندهٔ فیدبک حالتی که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته را بر روی ۳- و ۵- جایابی کند. کدام است؟

۱) $u = -\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$

۲) $u = +\begin{bmatrix} ۶/۵ & ۲/۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$

۳) $u = -\begin{bmatrix} ۶/۵ & ۲/۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$

۴) $u = +\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$

۳۰- در کدام حالت به ازای هر N متقارن مثبت معین، معادلهٔ زیر دارای جواب یکتای متقارن مثبت معین برای M می‌باشد؟

$$M - A^T MA = N$$

۱) $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$

۲) $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۳) $A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

۴) $A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

۳۱ـ یک گراف جهت‌دار و بدون وزن $G = (V, E)$ با دو رأس s و t داده شده است که درجه‌ی ورودی s و درجه‌ی خروجی t برابر صفراند. می‌خواهیم بیشینه‌ی تعداد مسیرهای یال‌مجزا از s به t را به‌دست آوریم. با استفاده از کدام‌یک از الگوریتم‌های زیر می‌توان این عدد را به‌دست آورد؟

۱) بلمن-فورد ۲) دایکسترا
۳) هافمن ۴) شبکه‌ی شار

۳۲ـ با اضافه کردن یک یال جهت‌دار جدید در یک گراف جهت‌دار، چند تا از موارد زیر در مورد تعداد اجزای هم‌بندقوی گراف، ممکن است درست باشد؟

- حداکثر یک واحد کم می‌شود.
- حداکثر یک واحد زیاد می‌شود.
- شاید تغییر نکند.
- شاید بیش از یک واحد کم شود.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۳ـ چندتا از مسئله‌های زیر ان‌پی هستند؟

- نسخه تصمیم‌گیری فروشنده‌ی دوره‌گرد
- مرتب بودن یک آرایه
- یافتن بیشینه‌ی شبکه‌ی شار
- نسخه تصمیم‌گیری کوله‌پشتی صفر و یک

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴ـ چندتا از گزاره‌های زیر در مورد طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس (که با $\delta(u, v)$ نمایش داده می‌شود) در یک گراف جهت‌دار و وزن‌دار G درست است؟ وزن یال‌ها ممکن است منفی باشد.

۱. با فرض عدم وجود دور منفی همیشه داریم: $\delta(u, t) \leq \delta(u, v) + \delta(v, t)$

۲. اگر دور منفی داشته باشیم، آن‌گاه برای هر دو راس u و v، عدد $\delta(u, v)$ برابر $-\infty$ خواهد بود.

۳. اگر یال با وزن منفی داشته باشیم اما دور منفی نداشته باشیم، $\sum \delta(u, v)$ که مجموع روی همه‌ی زوج راس‌ها گرفته شده نمی‌تواند منفی باشد.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۵ـ الگوریتم بلمن-فورد در هر مرحله همه‌ی یال‌ها را بررسی می‌کند و به ازای هر یال (u, v) اگر

$$d(v) > d(u) + w(u, v)$$

آن‌گاه $d(v)$ به‌روز می‌شود که $w(u, v)$ وزن یال (u, v) و $d(u)$ طول بهترین مسیر یافت شده تاکنون برای راس u است. اگر در مرحله‌ای برای هیچ راسی به‌روزرسانی انجام نشود الگوریتم بلمن-فورد خاتمه می‌یابد. با فرض آنکه الگوریتم بلمن-فورد برای یافتن همه‌ی کوتاه‌ترین مسیرها از رأس s در گراف G با n راس پس از $k < n$ بار تکرار به پایان برسد، چندتا از گزاره‌های زیر درست‌اند؟

۱. تعداد یال‌های همه‌ی کوتاه‌ترین مسیرها از s حداکثر $k - ۱$ است.

۲. وزن همه‌ی کوتاه‌ترین مسیرها از s حداکثر $k - ۱$ است.

۳. گراف دور منفی ندارد.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۶ـ فرض کنید درخت AVL به این صورت تعریف شود که به‌ازای هر گره v از درخت، اختلاف ارتفاع زیردرخت چپ و زیردرخت راست v حداکثر ۲ باشد. با این تعریف، اگر $F(h)$ کمینه‌ی تعداد عناصر یک درخت AVL با ارتفاع h باشد، کدام‌یک از رابطه‌های بازگشتی درست است؟ فرض کنید $F(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(1)$.

۱) $F(h) \leq F(h-1) + F(h-2) + 1$
۲) $F(h) \leq F(h-1) + F(h-3)$
۳) $F(h) \leq F(h-1) + F(h-2)$
۴) $F(h) \leq F(h-1) + F(h-3) + 1$

۳۷ـ گراف بدون جهت G با تعداد n رأس و m یال و دو رأس s و t داده شده است. می‌خواهیم بدانیم که آیا مسیری از s به t در G وجود دارد یا خیر. می‌دانیم که اگر G با لیست مجاورت پیاده‌سازی شود با استفاده از DFS یا BFS می‌توان این مسئله را در زمان $O(n+m)$ حل کرد. اگر به جای لیست مجاورت، G با ماتریس مجاورت پیاده‌سازی شده باشد، این مسئله را در چه زمانی می‌توان حل کرد؟

۱) $\mathcal{O}(n^2)$
۲) $\mathcal{O}(nm)$
۳) $\mathcal{O}(n+m)$
۴) $\mathcal{O}(m+n\log n)$

۳۸ـ در گراف بدون جهت G به تعریف‌های زیر توجه کنید:

- قطر: بیشینه‌ی کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس در گراف
- $l(s)$: بیشینه‌ی طول کوتاه‌ترین مسیرها از s به دیگر رأس‌ها.
- شعاع گراف: کمینه‌ی مقدار $l(s)$ بین همه‌ی رأس‌های گراف

اگر d و r به‌ترتیب قطر و شعاع یک گراف باشند، کدام‌یک از رابطه‌های زیر همیشه برقرار است؟ بهترین گزینه را انتخاب کنید.

۱) $r \leq d/2$
۲) $r \leq d$
۳) $r \geq d/2$
۴) $r \geq d$

۳۹ـ الگوریتم مرتب‌سازی ادغامی بر روی آرایه‌ی n عضوی را اینطور تغییر می‌دهیم که آرایه را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. هر قسمت را به‌همین روش و به‌صورت بازگشتی مرتب می‌کنیم و سپس سه بخش مرتب‌شده را در هم ادغام می‌کنیم تا آرایه‌ی مرتب به‌دست آید. زمان اجرای این الگوریتم چیست؟

۱) $\mathcal{O}(n^2)$
۲) $\mathcal{O}(n\log n)$
۳) $\mathcal{O}(n\log^2 n)$
۴) $\mathcal{O}(n^{\log_2 3})$

۴۰ـ حل رابطه‌ی بازگشتی $T(n) = 2^{\log_2 3} T(n/2) + n\sqrt{n}$ کدام است؟

۱) $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$
۲) $\mathcal{O}(n\sqrt{n}\log n)$
۳) $\mathcal{O}(n^{\log_2 3})$
۴) $\mathcal{O}(n^{\log_2 3}\log n)$

۴۱ـ در مسئله‌ی ضرب ماتریس‌ها فرض کنید که می‌خواهیم $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ را محاسبه کنیم که ماتریس A_i به ابعاد $d_{i-1} \times d_i$ است. می‌خواهیم ترتیبی از ضرب ماتریس‌ها را به‌دست آوریم که تعداد عناصر ماتریس‌های میانی (که در مراحل مختلف ضرب به‌دست می‌آید) کمینه شود. اگر این تعداد کمینه را هزینه‌ی ضرب بنامیم، یعنی C_{ij} هزینه ضرب زیرمسئله‌ی $A_i \times A_2 \times \cdots \times A_j$ باشد، داریم $C_{i,i} = 0$. کدام‌یک از رابطه‌های زیر برای این مسئله درست است؟

۱) $C_{ij} = \min_{i \leq k < j} \max\{C_{ik}, C_{k+1,j} + d_{i-1}d_j\}$
۲) $C_{ij} = \min_{i \leq k < j} \max\{C_{ik}, C_{k+1,j}, d_{i-1}d_j\}$
۳) $C_{ij} = \min_{i \leq k < j} \max\{C_{ik} + C_{k+1,j}, d_{i-1}d_j\}$
۴) $C_{ij} = \min_{i \leq k < j} \max\{C_{ik}, C_{k+1,j}\} + d_{i-1}d_j$

۴۲ـ n نفر به‌ترتیب تصادفی وارد یک اتاق می‌شوند. می‌خواهیم با دیدن فرد iام بلندقدترین فرد بین i نفر دیده‌شده را به دست آوریم. ما تنها یک حافظه برای ذخیره‌سازی اندیس بلندقدترین فرد داریم که هر بار با دیدن فرد بلندتر روزآمد می‌شود. می‌خواهیم میانگین تعداد روزآمد کردن این حافظه را به‌دست آوریم. این میانگین به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) $\ln n$ ۲) n ۳) $n/2$ ۴) $\log^2 n$

۴۳ـ فرض کنید در متنی تعداد تکرار iامین حرف انگلیسی برابر 2^i است. ارتفاع درخت هافمن برای این حرف‌ها در الگوریتم فشرده‌سازی هافمن کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۵

۴۴ـ نسخه‌ی تصمیم‌گیری چندتا از مسائل زیر برای یک گراف همبند بدون‌جهت و وزن‌دار G ان‌پی-تمام است؟

- پیدا کردن تطابق بیشینه
- پیدا کردن دور همیلتنی بیشینه
- پیدا کردن دور اویلری بیشینه
- پیدا کردن برش بیشینه

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۵ـ فرض کنید ۱۳۹۳ نقطه روی محور اعداد حقیقی داده شده است. می‌خواهیم این نقاط را رنگ‌آمیزی کنیم به گونه‌ای که به ازای هر بازه‌ی دل‌خواه $[a, b]$ اگر حداقل یک نقطه از ۱۳۹۳ نقطه‌ی داده‌شده داخل بازه بود، رنگ حداقل یکی از نقاط قرارگرفته داخل این بازه با دیگر نقاط قرارگرفته داخل بازه فرق کند. با چند رنگ این کار امکان‌پذیر است؟ بهترین گزینه را انتخاب کنید.

۱) ۱۱ ۲) ۱۳۹۲ ۳) ۱۳۹۳ ۴) ۶۷